1. sada domácich úloh

Termín odovzdania **štvrtok 27. 10. 2022 13:10**

Úloha 1. *(1,5 boda)* Zistite, či nasledovný zložený výrok je tautológia

$$(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg B \Rightarrow (D \wedge \neg E)) \vee (\neg C \wedge D \wedge E) \vee (D \Rightarrow (\neg A \wedge C)).$$

Vaše tvrdenie dokážte.

Riešenia založené na bezhlavom vypísaní tabuľky pravdivostnej hodnôt budeme hodnotiť najviac za 0,5 b.

Riešenie

Áno, výrok je tautológia. Dokážeme to sporom. Teda predpokladejme, že pre nejaké ohodnotenie premenných v nám platí

1. $v((A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg B \Rightarrow (D \wedge \neg E)) \vee (\neg C \wedge D \wedge E) \vee (D \Rightarrow (\neg A \wedge C))) = 0$
2. $v(A \wedge \neg B \wedge C) = 0$ (z 1.)
3. $v(\neg B \Rightarrow (D \wedge \neg E)) = 0$ (z 1.)
4. $v(\neg C \wedge D \wedge E) = 0$ (z 1.)
5. $v(D \Rightarrow (\neg A \wedge C)) = 0$ (z 1.)
6. $v(\neg B) = 1$ (z 3.)
7. $v(D \wedge \neg E) = 0$ (z 3.)
8. $v(B) = 0$ (z 6.)
9. $v(D) = 1$ (z 5.)
10. $v(\neg A \wedge C) = 0$ (z 5.)
11. $v(E) = 1$ (z 7. a 9.)
12. $v(C) = 1$ (z 4., 9. a 11.)
13. $v(A) = 1$ (z 10. a 12.)
14. $v(A \wedge \neg B \wedge C) = 1$ (z 13., 8. a 12.) – a to je v spore s 2.

Úloha 2. *(1,5 boda)* Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 1$ platí

$$\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n} < \frac{2^{n+2}}{n}.$$

Riešenie

Na začiatok separátne overíme, že nervnosť platí pre $n = 1$ ($2 < 8$) a $n = 2$ ($1 + 1 = 2 < 8 = 16/2$). Platnosť pre všetky $n \geq 3$ dokážeme matematickou indukciou.

Báza Pre $n = 3$ máme $1 + 1 + 8/3 = 14/3 < 32/3$, čo platí.

Indukčný krok Uvažujme teraz $n \geq 3$ ($n \in \mathbb{N}$) a predpokladajme, že pre toto n platí

$$\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n} < \frac{2^{n+2}}{n}. \tag{IP}$$

Dokážeme, že potom platí

$$\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n} + \frac{2^{n+1}}{n+1} < \frac{2^{n+3}}{n+1}. \tag{1}$$

Z (IP) vieme, že platí

$$\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n} + \frac{2^{n+1}}{n+1} < \frac{2^{n+2}}{n} + \frac{2^{n+1}}{n+1}. \tag{2}$$

Ekvivalentnými úpravami dokážeme, že platí

$$\begin{aligned}
\frac{2^{n+2}}{n} + \frac{2^{n+1}}{n+1} &< \frac{2^{n+3}}{n+1} && |: 2^{n+1} && (3)\\
\frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} &< \frac{4}{n+1} && | \cdot n(n+1),\ n(n+1) > 0\\
2n + 2 + n &< 4n\\
2 &< n
\end{aligned}$$

Z platnosti (2) a (3) (vďaka tranzitívnosti nerovnosti) dostávame, že platí (1), čo sme chceli dokázať.

Poznámka. Nerovnosť (3) stačí dokazovať so symbolom $\leq$, lebo ak $a < b$ a $b \leq c$, tak $a < c$. Potom nemusíme overovať platnosť pre $n = 3$.

Úloha 3. *(1,5 boda)* Nech A je podmnožina prirodzených čísel. *Supermnožinou* množiny A nazveme množinu všetkých nadmnožín množiny A v univerze prirodzených čísel. Budeme ju označovať $\mathcal{S}(A)$. Teda

$$\mathcal{S}(A) = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \subseteq X\}.$$

Zistite, či pre ľubovoľné množiny A, B platí:

a) $\mathcal{S}(A \cap B) \subseteq \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$,

b) $\mathcal{S}(A \cap B) \supseteq \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$.

Vaše tvrdenia dokážte. Pre získanie plného počtu bodov nesmiete bez dôkazu využiť tvrdenia o množinách, všetky využité tvrdenia dokážte z definície.

Riešenie

a) Tvrdenie neplatí. Protipríkladom sú napr. množiny $A = \{1\}$ a $B = \{2\}$. Pre množinu $\{1\}$ máme $\{1\} \in \mathcal{S}(A \cap B) = \mathcal{S}(\emptyset)$, lebo $\emptyset \subseteq \{1\}$. Ale $\{1\} \notin \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$, lebo $\{1\} \notin \mathcal{S}(B) = \mathcal{S}(\{2\})$, lebo $\{2\} \not\subseteq \{1\}$.

b) Ukážeme, že tvrdenie platí. Keďže obe strany obsahujú len množiny prirodzených čísel, tak nám stačí ukázať, že $(\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))(X \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{S}(A \cap B))$. Pre každé $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ platí:

1. $X \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$
2. $X \in \mathcal{S}(A) \wedge X \in \mathcal{S}(B)$
3. $A \subseteq X \wedge B \subseteq X$
4. $A \cap B \subseteq X$, lebo každý prvok y množiny $A \cap B$ sa nachádza aj v A a vďaka $A \subseteq X$ sa y nachádza aj v X
5. $X \in \mathcal{S}(A \cap B)$

Úloha 4. *(BONUS, 2 body)* Na polkružnici máme vyznačených b (navzájom rôznych) bodov a každý z nich je zafarbený práve jednou z f farieb (b, $f \in \mathbb{N}^+$). Susedné body sú zafarbené rôznymi farbami. Každú dvojicu bodov rovnakej farby spojíme úsečkou. Dokážte, že ak sa žiadne dve úsečky nepretnú, tak $b \leq 2f - 1$.

Riešenie

Zadanie možno interpretovať tak, že ak máme predpísaných f farieb, tak vieme mať na polkružnici najviac $2f-1$ bodov. Toto tvrdenie dokážeme úplnou matematickou indukciou podľa premennej f. Pritom namiesto polkružnice budeme uvažovať, že body ležia na ľubovoľnom kružnicovom oblúku.

Báza Pre $f=1$ farbu vieme mať najvaic $1=2f-1$ bod, lebo dva body sú už susedné a mali byť rovnakú farbu.

Indukčný krok Nech $f \in \mathbb{N}^+$. Predpokladajme, že pre všetky $k \in \mathbb{N}^+$, $k \leq f$ platí, že pre k farieb vieme mať na kružnicovom oblúku najviac $2k-1$ bodov. Uvažujme teraz $f+1$ farieb a pozrime na prvý bod na oblúku a všetky ostatné body zafarbené rovnakou farou – označme ich $A_1, A_2, \dots, A_t$ pre nejaké $t \in \mathbb{N}^+$. Tieto body nám rozdelia oblúk na t úsekov $u_1, u_2, \dots u_t$, teda oblúk nám vyzerá takto:

$$A_1, u_1, A_2, u_2, \dots, u_{t-1}, A_t, u_t.$$

(V skutočnosti t môže byť najviac 3, lebo inak by sa spojnice bodov $A_1, A_2, \dots, A_t$ pretínali; v riešení to však nepotrebujeme.) Počet farieb v úseku u_i, $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, si označme f_i. Úsek u_t môže byť prázdny, teda $f_t \geq 0$, no zvyšné úseky obsahujú aspoň jeden bod, a teda $f_i \geq 1$ pre $i \in \{1, 2, \dots, t-1\}$, keďže tieto úseky oddeľujú dva body rovnakej farby. Navyše, žiadne z úsekov u_i, u_j nemajú spoločnú farbu, lebo inak by spojnica spájajúca dva body rovnakej farby preťala spojnicu A_1A_j. Teda $f_1 + f_2 + \cdots + f_t = f$. Pre každý z úsekov u_i pre $i \in \{1, 2, \dots, t-1\}$ teda platí $f_i \leq f$, a tak z indukčného predpokladu tento úsek obsahuje najviac $2f_i - 1$ bodov. Ak $f_t \geq 1$, tak posledný úsek obsahuje tiež najviac $2f_i - 1 \leq 2f_i$ bodov; ak $f_t = 0$, tak obsahuje $0 = 2f_i$ bodov; teda v oboch prípadoch posledný úsek obsahuje najviac $2f_i$ bodov. Preto celý oblúk obsahuje najviac

$$t + (2f_1 - 1) + (2f_2 - 1) + \cdots + (2f_{t-1} - 1) + (2f_t) = t + 2(f_1 + f_2 + \cdots + f_t) - (t-1) = t + 2f - t + 1 = 2f + 1.$$

Teda sme ukázali, že oblúk s $f+1$ farbami obsahuje najviac $2f+1 = 2(f+1) - 1$ bodov a tým je dôkaz indukciou dokončený.