Písomka z Úvodu do diskrétnych štruktúr

10. 11. 2021

Úloha 1. *(2 body)* Nájdite negáciu nasledovného výroku:

$$(\forall a \in \mathbb{Z})[(\exists b \in \mathbb{Z})(a \mid b) \Rightarrow ((\forall c \in \mathbb{Z})(c > a \Rightarrow c \neq 5) \wedge (\exists d \in \mathbb{N})(d < a))].$$

Poznámka. Každý kvantifikátor sa viaže práve na jednu zátvorku hneď za ním.

Riešenie.

$$(\exists a \in \mathbb{Z})[(\exists b \in \mathbb{Z})(a \mid b) \wedge ((\exists c \in \mathbb{Z})(c > a \wedge c = 5) \vee (\forall d \in \mathbb{N})(d \geq a))].$$

□

Úloha 2. *(4 body)* Zistite (a následne dokážte), či nasledovný zložený výrok je tautológia:

$$(A \Rightarrow B) \vee [((C \vee \neg D \vee \neg E) \wedge (\neg B \Rightarrow D)) \Rightarrow (C \vee (A \wedge \neg E))].$$

Dôkaz. Sporom dokážeme, že ide tautológiu. Nech teda platí negácia výroku

1. $A \wedge \neg B \wedge [((C \vee \neg D \vee \neg E) \wedge (\neg B \Rightarrow D)) \wedge (\neg C \wedge (\neg A \vee E)]$
2. A (z 1.)
3. $\neg B$ (z 1.)
4. $C \vee \neg D \vee \neg E$ (z 1.)
5. $\neg B \Rightarrow D$ (z 1.)
6. $\neg C$ (z 1.)
7. $\neg A \vee E$ (z 1.)
8. D (z 3. a 5.)
9. $\neg E$ (z 4., 6. a 8.)
10. $A \wedge \neg E$ (z 2. a 9.) – to je však negácia 7., čím dostávame spor.

□

Úloha 3. *(4,5 boda)* Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 0$ platí $3 \cdot 2^n > 5n - 4$.

Dôkaz. Najprv platnosť tvrdenia overíme pre $n \in \{0, 1, 2\}$:

$$n = 0\colon 3 > -4,$$
$$n = 1\colon 6 > 1,$$
$$n = 2\colon 12 > 6.$$

Teraz matematickou indukciou dokážeme, že pre všetky celé $n \geq 2$ platí $3 \cdot 2^n > 5n - 4$. Bázu $n = 2$ máme už overenú.

Nech $n \geq 2$ a predpokladajme, že platí $3 \cdot 2^n > 5n - 4$ (IP). Dokážeme, že potom platí $3 \cdot 2^{n+1} > 5(n+1) - 4 = 5n + 1$. Z indukčného predpokladu platí

$$3 \cdot 2^{n+1} = 2 \cdot (3 \cdot 2^n) \overset{\text{IP}}{>} 2(5n - 4) = 10n - 8.$$

Taktiež máme

$$10n - 8 > 5n + 1$$
$$\Updownarrow$$
$$5n > 9$$
$$\Updownarrow$$
$$n > 1{,}8,$$

čo pre $n \geq 2$ platí. Spojením týchto nerovností dostávame

$$3 \cdot 2^{n+1} > 10n - 8 > 5n + 1,$$

čo sme chceli dokázať. $\square$

Úloha 4. *(4,5 boda)* O relácii

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ (\exists k \in \mathbb{Z})(a = 6kb)\}$$

zistite (a následne dokážte), či je reflexívna, ireflexívna, symetrická a tranzitívna. Vaše tvrdenia dokážte.

Dôkaz. **Reflexína nie je,** lebo $\neg 1R1$, nakoľko neexistuje celé číslo k, pre ktoré by platilo $1 = 6k$ ($k = 1/6$).

Ireflexívna nie je, lebo $0R0$, keďže $0 = 6 \cdot 1 \cdot 0$.

Symetrická nie je: Platí $6R1$, lebo $6 = 6 \cdot 1 \cdot 1$. Neplatí však $1R6$, lebo neexistuje celé číslo k, pre ktoré by platilo $1 = 36k$ ($k = 1/36$).

Tranzitívna je. Nech platí

$$aRb \wedge bRc.$$

Teda existujú celé čísla k, l, pre ktoré

$$a = 6kb \wedge b = 6lc.$$

Potom

$$a = 6kb = 6klc = 6(kl)c.$$

Čiže sme našli také celí číslo $m = kl$, pre ktoré $a = 6mc$. Preto

$$aRc.$$

$\square$

Úloha 5. *(5 bodov)* Dokážte, že pre každú množinu A a každé relácie R, S, T a U definované na množine A platí

$$RS - TU \subseteq R(S - U) \cup (R - T)S.$$

Pri dôkaze výchdzajte z definícií operácií s množinami a reláciami. Neodvolávajte sa na tvrdenia o množinách a reláciách.

Dôkaz. Keďže na ľavej strane máme reláciu, čo je množina usporiadaných dvojíc, všetky jej prvky sú usporiadané dvojice. Preto nám stačí dokázať, že pre všetky usporiadané dvojice (a, b) platí

$$(a, b) \in RS - TU \Rightarrow (a, b) \in R(S - U) \cup (R - T)S.$$

1. Nech $(a, b) \in RS - TU$
2. $(a, b) \in RS \wedge (a, b) \notin TU$
3. $(a, c) \in R \wedge (c, b) \in S$ pre nejaké c (lebo $(a, b) \in RS$ z 2.)
4. $(\forall d)((a, d) \notin T \vee (d, b) \notin U)$ (lebo $(a, b) \notin TU$ z 2.)
5. $(a, c) \notin T \vee (c, b) \notin U$ (keďže 4. platí pre všetky d, tak platí aj po dosadení $d = c$

Dôkaz rozdelíme podľa toho, ktorý z výrokov v 5. platí

5a. $(a, c) \notin T$	5b. $(c, b) \notin U$
6a. $(a, c) \in R$ (z 3.)	6b. $(c, b) \in S$ (z 3.)
7a. $(a, c) \in R - T$ (z 5a. a 6a.)	7b. $(c, b) \in S - U$ (z 5b. a 6b.)
8a. $(c, b) \in S$ (z 3.)	8b. $(a, c) \in R$ (z 3.)
9a. $(a, b) \in (R - T)S$ (z 7a. a 8a.)	9b. $(a, b) \in R(S - U)S$ (z 7b. a 8b.)

Spojením záverov z oboch vetiev tak máme, že platí

$$(a, b) \in R(S - U) \cup (R - T)S,$$

čo sme mali dokázať. $\square$