

Cvičenie 1: Matematická indukcia

Základná forma matematickej indukcie

Princíp matematickej indukcie: nech $X \subseteq \mathbb{N}$ je množina prirodzených čísel taká, že:

- (i) $0 \in X$.
- (ii) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí: ak $n \in X$, tak $n + 1 \in X$.

Potom $X = \mathbb{N}$.

V prípade, že máme danú postupnosť výrokov $(V(n))_{n \in \mathbb{N}}$, môžeme za X zvoliť množinu tých $n \in \mathbb{N}$, pre ktoré je výrok $V(n)$ pravdivý. Ako priamy dôsledok princípu matematickej indukcie tak dostávame nasledujúcu vetu:

Veta 1. *Nech $(V(n))_{n \in \mathbb{N}}$ je postupnosť výrokov taká, že*

- (i) *Výrok $V(0)$ je pravdivý.*
- (ii) *Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí: ak je pravdivý výrok $V(n)$, tak je pravdivý aj výrok $V(n + 1)$.*

Potom je výrok $V(n)$ pravdivý pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Tvrdenie (i) predchádzajúcej vety sa nazýva *báza indukcie* a tvrdenie (ii) sa nazýva *indukčný krok*.

Princíp matematickej indukcie nemožno dokázať – ide o jednu z tzv. *Peanových axióm*, ktorá je ale ekvivalentná inému pomerne očividnému tvrdeniu, tzv. *vlastnosti dobrého usporiadania množiny $\mathbb{N}$* (viď nižšie). Je teda možné chápať princíp matematickej indukcie ako axiómu a vlastnosť dobrého usporiadania množiny $\mathbb{N}$ ako dôsledok tejto axiómy, alebo naopak.

Často sa stáva, že tvrdenie platí (alebo dáva zmysel) iba pre prirodzené čísla n väčšie alebo rovné ako nejaké $n_0 \in \mathbb{N}$. Pomocou princípu matematickej indukcie ale možno ľahko dokázať platnosť nasledujúceho variantu vety 1:

Veta 2. *Nech $n_0 \in \mathbb{N}$ a $(V(n))_{n \geq n_0}$ je postupnosť výrokov taká, že*

- (i) *Výrok $V(n_0)$ je pravdivý.*
- (ii) *Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$ platí: ak je pravdivý výrok $V(n)$, tak je pravdivý aj výrok $V(n + 1)$.*

Potom je výrok $V(n)$ pravdivý pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$.

→ **Úloha 1.** Dokážte vetu 2 (s použitím princípu matematickej indukcie).

Úloha 2. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $3 \mid n^3 + 2n$.

Úloha 3. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $5 \mid n^5 - n$.

→ **Úloha 4.** Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}^+$ platí $31 \mid 5^{n+1} + 6^{2n-1}$.

Úloha 5. (*) Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí $n^2 + n + 1 \mid n^{k+2} + (n + 1)^{2k+1}$.

→ **Úloha 6.** Nech $A \subseteq \mathbb{N}$ je ľubovoľná konečná množina prirodzených čísel, pre ktorú platí $|A| = n$. Označme

$$S(A) = \{x + y \mid x \in A; y \in A\}.$$

Dokážte, že $|S(A)| \geq 2n - 1$.

Úloha 7. (*) Nech $A, B \subseteq \mathbb{N}$ sú ľubovoľné konečné množiny prirodzených čísel také, že $|A| = m \geq 1$ a $|B| = n \geq 1$. Označme

$$A + B = \{a + b \mid a \in A; b \in B\}.$$

Dokážte, že potom

$$|A + B| \geq m + n - 1$$

a ukážte, že tento dolný odhad je tesný¹ pre všetky $m, n \geq 1$.

Úloha 8. Dokážte, že pre ľubovoľných n kladných reálnych čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ so súčinom 1 platí

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n.$$

Úloha 9 (Nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom). (*) Dokážte, že pre ľubovoľných n nezáporných reálnych čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Úloha 10. Z teórie čísel vieme, že $\text{NSD}(a, b) = \text{NSD}(a, a - b)$. Dokážte, že potom platí aj $\text{NSD}(a, b) = \text{NSD}(a, a \bmod b)$.

Silná matematická indukcia

Pri dôkaze indukčného kroku sa pri „bežnej“ matematickej indukcii (podľa vety 1 resp. vety 2) odvodzuje platnosť výroku $V(n+1)$ len na základe predpokladu platnosti výroku $V(n)$ – tento predpoklad nazývame *indukčným predpokladom*. Formálne sa teda nemožno odvolávať na platnosť výrokov $V(j)$ pre $j < n$; indukčným predpokladom je iba platnosť výroku $V(n)$.

Ľahko možno nahliadnuť, že ide o umelé a čisto formálne obmedzenie. Ak totiž v báze indukcie dokážeme platnosť výroku $V(n_0)$ a následne dokážeme indukčný krok pre $n = n_0, \dots, k-1$, ľahko vidieť, že sú pravdivé *všetky* výroky $V(n_0), V(n_0 + 1), \dots, V(k)$. Pri dôkaze indukčného kroku pre $n = k$ sa teda môžeme odvolávať aj na platnosť výrokov $V(j)$ pre $n_0 \leq j < k$: ľahko možno dokázať, že záver vety 2 – čiže pravdivosť výroku $V(n)$ pre všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$ – bude aj v tomto prípade zaručený. Túto myšlienku možno sformalizovať nasledovne:

Veta 3. Nech $n_0 \in \mathbb{N}$ a $(V(n))_{n \geq n_0}$ je postupnosť výrokov taká, že

(i) Výrok $V(n_0)$ je pravdivý.

(ii) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$ platí: ak sú pravdivé výroky $V(n_0), V(n_0 + 1), \dots, V(n)$, tak je pravdivý aj výrok $V(n + 1)$.

Potom je výrok $V(n)$ pravdivý pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$.

Veta 3 sa niekedy nazýva *princípom úplnej matematickej indukcie*, prípadne *princípom silnej matematickej indukcie*. Ak si navyše uvedomíme, že bod (i) vieme dostať z bodu (ii) dosadením $n = n_0 - 1$ a vhodne posunieme indexy, tak vieme sformulovať princíp silnej matematickej indukcie aj v jednom kroku.

Veta 4. Nech $n_0 \in \mathbb{N}$ a $(V(n))_{n \geq n_0}$. Nech pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$, platí implikácia:

Ak je výrok $V(k)$ pravdivý pre každé $k \in \mathbb{N}$ menšie ako n , tak je pravdivý aj výrok $V(n)$.

Potom je výrok $V(n)$ pravdivý pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$.

¹K ľubovoľnej dvojici prirodzených čísel $m, n \geq 1$ teda existujú konečné množiny $A, B \subseteq \mathbb{N}$ také, že $|A| = m$, $|B| = n$ a $|A + B| = n + m - 1$.

V tejto vete pre $n = n_0$ dostaneme implikáciu: „Ak pravda, tak je pravdivý výrok $V(n_0)$.“ Ten má rovnakú pravdivostnú hodnotu ako $V(n_0)$.

V tejto súvislosti treba upozorniť na skutočnosť, že predovšetkým vo filozofickej logike sa niekedy používa pojem úplnej indukcie vo vzťahu k tzv. neúplnej indukcii; tá v matematike nemá miesto, no často sa používa v empirických vedách (z 1000 neúspešných pokusov o prerazenie hlavy múrom napríklad môže empirická veda trochu neuvážene usúdiť, že to nie je možné; o matematický dôkaz ale nejde). Podľa tejto terminológie je matematická indukcia *vždy* úplná, hoci nejde o úplnú matematickú indukciu v zmysle zavedenom vyššie.

Úloha 11. Dokážte vetu 3 (s použitím vety 2).

Nápoveda: nech $V'(n) := V(n_0) \wedge V(n_0 + 1) \wedge \dots \wedge V(n)$, potom...

→ **Úloha 12.** Dokážte, že každé prirodzené číslo $n \geq 2$ možno rozložiť na súčin prvočísel.

→ **Úloha 13.** Pod *rozlomením* obdĺžnikovej tabuľky čokolády rozumieme jej rozdelenie (pozdĺž priamky, ktorá prechádza hranami medzi štvorčekmi) na dve obdĺžnikové tabuľky, ktoré dohromady obsahujú rovnaký počet štvorčekov ako pôvodná tabuľka. Dokážte, že každú obdĺžnikovú tabuľku čokolády o $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ štvorčekoch možno rozdeliť na jednotlivé štvorčeky pomocou $n - 1$ rozlomení.

Úloha 14. (*) Dokážte predošlé tvrdenie bez použitia matematickej indukcie

→ **Úloha 15.** Nech n je kladné celé číslo. Na začiatku máme jednu kôpku s n žetónmi. V jednom kroku si vyberieme ľubovoľnú kôpku s aspoň 2 žetónmi a rozdelíme ju na dve neprázdne kôpky, jednu s a žetónmi a druhú s b žetónmi. Za takýto krok získame ab bodov. Tento krok opakujeme do vtedy, dokým všetky kôpky neobsahujú len jeden žetón. Dokážte, že bez ohľadu na to, aké kroky sme vykonávali, za celý tento proces získame presne $\frac{1}{2}n(n - 1)$ bodov.

Príklad. Na začiatku máme kôpku so 10 žetónmi. V prvom kroku ju rozdelíme napríklad na dve kôpky s 3 a 7 žetónmi, za čo získame $3 \cdot 7 = 21$ bodov. V druhom kroku si vyberieme napríklad kôpku so 7 žetónmi a rozdelíme ju na 2 a 5 žetónov, čím získame $2 \cdot 5 = 10$ bodov.

Úloha 16. Máme daný konvexný n -uholník, kde n je celé číslo a $n \geq 3$. Pomocou niekoľkých priamok ho rozdelíme na samé trojuholníky. Dokážte, že po tomto procese dostaneme určite aspoň $n - 2$ trojuholníkov.

Poznámka. Mnohouholník M je *konvexný*, ak pre každú dvojicu bodov X, Y (či už z obvodu alebo z vnútra) mnohouholník M obsahuje celú úsečku XY . Ekvivalentne sa dá povedať, že mnohouholník je konvexný, ak všetky jeho vnútorné uhly sú menšie ako 180° .

Úloha 17. Uvažujme tvrdenie: Pre každé prirodzené číslo n existuje prirodzené číslo k a k -prvková postupnosť čísel $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$, ktorej každý člen je z množiny $\{-1, 1, 4, 6\}$, pričom platí

$$n = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot 4^i.$$

Dokážte toto tvrdenie. Napíšte program, ktorý načíta prirodzené číslo n a vypíše príslušnú postupnosť $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ z tvrdenia.

Poznámka. Aj 0 je prirodzené číslo. 0-prvková postupnosť je prázdna a súčet cez 0 prvkov (v tomto prípade pre k od 0 po -1) je definovaný ako 0.

Úloha 18. Dokážte, že každé prirodzené číslo možno zapísať ako súčet niekoľkých navzájom rôznych Fibonacciho čísel.

Fibonacciho čísla $F_0, F_1, F_2, \dots$ sú definované nasledovne: $F_0 = 0, F_1 = 1$ a pre všetky celé čísla $n \geq 2$ platí $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Zápis $2 = F_1 + F_2$ nepovažujeme ako súčet navzájom rôznych Fibonacciho čísel, nakoľko $F_1 = F_2$.

Úloha 19. Nech $n \in \mathbb{N}^+$ a M je n -prvková množina. Majme postupnosť $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ prvkov množiny M , ktorá spĺňa nasledovné vlastnosti:

- (i) $a_i \neq a_{i+1}$ pre každé $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$;
- (ii) nemožno vybrať štyri indexy $b, c, d, e \in \{1, 2, \dots, k\}$ také, že $b < c < d < e$, $a_b = a_d \neq a_c = a_e$ (teda nejaké dve rôzne čísla x, y nenájde v konfigurácii x, y, x, y , nie nutne pri sebe).

Dokážte, že $k \leq 2n - 1$.

Úloha 20. (*) Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla a, b existujú celé čísla k, l také, že

$$\text{NSD}(a, b) = ka + lb.$$

Nápoveda. Môžete využiť, že $\text{NSD}(a, b) = \text{NSD}(b, a - b)$.

Pri použití úplnej matematickej indukcie je často nutné dokázať „viacero báz indukcie“. Ide najmä o tie situácie, kde sa v dôkaze indukčného kroku odvolávame na platnosť aspoň jedného výroku $V(n - j)$ pre $j \geq 1$. Takýto dôkaz indukčného kroku je vo všeobecnosti neprípustný pre n také, že $n - j < n_0$ (kde n_0 má význam z vety 3), pretože o $V(n - j)$ v takom prípade vo všeobecnosti nevieme vôbec nič (dokonca ani to, či takýto výrok dáva zmysel). Preto treba „malé hodnoty“ čísla n ošetriť osobitne. Čitateľ by iste dokázal upraviť vetu 3 tak, aby brala na zreteľ aj tento prípad.

Úloha 21. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 8$ existujú $a, b \in \mathbb{N}$ tak, že platí $n = 3a + 5b$.

Úloha 22. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 12$ existujú $a, b \in \mathbb{N}$ tak, že platí $n = 4a + 5b$.

Úloha 23. Dokážte tvrdenia z predchádzajúcich dvoch úloh bez použitia úplnej matematickej indukcie.

Fibonacciho čísla sú definované nasledujúcim rekurentným predpisom:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, \\ F_1 &= 1, \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \quad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

V nasledujúcom budeme používať označenia

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{a} \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Číslo φ sa zvykne nazývať *zlatý rez*.

Úloha 24. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - \psi^n).$$

Úloha 25. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus 0$ platí

$$\varphi^n = \varphi F_n + F_{n-1}.$$

Úloha 26. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1.$$

Úloha 27. Dokážte:

a) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^n F_{2k+1} = F_{2n+2}.$$

b) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^n F_{2k} = F_{2n+1} - 1.$$

Úloha 28. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}.$$

Úloha 29. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ako nerobiť indukciu

Úloha 30. Nájdite chybu v „dôkazoch“ nasledovných „viet“.

„**Veta**“ 5. Pre všetky $a, b \in \mathbb{N}$ platí $a = b$.

„**Dôkaz**“. Matematickou indukciou vzhľadom na $M := \max\{a, b\}$.

1° Pre $M = 0$ nutne $a = b = 0$ a tvrdenie platí.

2° Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $M = k$. Ukážeme, že platí aj pre $M = k + 1$.

Nech $a, b \in \mathbb{N}$ sú čísla také, že $\max\{a, b\} = k + 1$. Potom $\max\{a - 1, b - 1\} = k$. Z indukčného predpokladu teda vyplýva, že platí $a - 1 = b - 1$, a teda aj $a = b$. $\square$

Indukcia a dobre usporiadané množiny

Hovoríme, že lineárne usporiadaná množina $(X, <)$ je *dobre usporiadaná*, ak každá neprázdna množina $A \subseteq X$ má v usporiadaní $<$ najmenší prvok. Množina $\mathbb{N}$ je dobre usporiadaná – ide o jednu z jej kľúčových vlastností, ktorá je ekvivalentná princípu matematickej indukcie (a teda môže byť považovaná za jednu z axiém Peanovej aritmetiky práve namiesto princípu matematickej indukcie).

V prípade, že sa pomocou matematickej indukcie dá dokázať pravdivosť nejakého výroku $V(n)$ pre všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$, je možné rovnaké tvrdenie dokázať aj s použitím princípu dobrého usporiadania. Stačí za účelom sporu predpokladať, že množina $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0 \wedge \neg V(n)\}$ je neprázdna. V takom prípade má táto množina najmenší prvok m . Zostáva dokázať, že:

- (i) Nemôže platiť $m = n_0$ – to je zrejme ekvivalentné dôkazu pravdivosti výroku $V(n_0)$, a teda báze matematickej indukcie.
- (ii) Ak $m > n_0$, tak nutne $m - 1 \in A$, čo je spor s minimalitou m . Tu sa v skutočnosti dokazuje iba implikácia „ak $\neg V(m)$, tak $\neg V(m - 1)$ “, čo je obmena implikácie „ak $V(m - 1)$, tak $V(m)$ “. Keďže $m > n_0$, môžeme zaviesť premennú $n := m - 1$, čím konečne dostávame implikáciu „ak $V(n)$, tak $V(n + 1)$ “ z indukčného kroku.

Na dôkaz s využitím vlastnosti dobrého usporiadania množiny $\mathbb{N}$ sa teda možno dívať ako na „matematickú indukciu sporom“.

Úloha 31. Z princípu matematickej indukcie odvodte vlastnosť dobrého usporiadania množiny $\mathbb{N}$.

Úloha 32. Z vlastnosti dobrého usporiadania množiny $\mathbb{N}$ odvodte princíp matematickej indukcie.

Úloha 33. Vyberte si niektorú z predošlých úloh. Miesto dôkazu matematickou indukciou ju dokážte s využitím dobrého usporiadania $\mathbb{N}$.

V nasledujúcej úlohe možno použiť napríklad indukciu vzhľadom na n , pričom báza tejto indukcie sa dokáže ďalšou indukciou, tentokrát vzhľadom na k . Alternatívne možno tvrdenie dokazovať indukciou vzhľadom na k a bázu dokázať indukciou vzhľadom na n .

Úloha 34. Uvažujme zobrazenie $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ dané nasledovne:

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 2, \\ f(n+1, k) &= f(n, k) + 2(n+k+2), \quad \forall n, k \in \mathbb{N}, \\ f(n, k+1) &= f(n, k) + 2(n+k+1), \quad \forall n, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí

$$f(n, k) = (n+k+2)^2 - n - 3k - 2.$$

Na záver uvedieme ešte jednu pomerne jednoduchú úlohu, ktorá sa objaví aj v nasledujúcich cvičeniach.

→ **Úloha 35.** Nech $n \geq 1$ je prirodzené číslo. Z množiny $\{1, \dots, 2n\}$ vyberme ľubovoľných $n+1$ (rôznych) čísel. Dokážte, že medzi vybranými číslami musia existovať dve, ktoré majú rozdiel 1.

Riešenia úloh

Riešenie úlohy 8

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa n . Pre $n = 1$ máme zjavne $x_1 = 1$ a tvrdenie $x_1 \geq 1$ zjavne platí.

Predpokladajme, že pre nejaké $k \in \mathbb{N}^+$ a pre ľubovoľných n kladných reálnych čísel $y_1, y_2, \dots, y_k$ so súčinom 1 platí $y_1 + y_2 + \dots + y_k \geq k$. Nech $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ je nejakých $k+1$ kladných reálnych čísel so súčinom 1. Ukážeme, že platí

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} \geq k + 1.$$

Ak by bolo každé z čísel $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ väčšie ako 1 (resp. menšie ako 1), tak by bol ich súčin väčší ako 1 (resp. menší ako 1, čo by bol spor. Preto musí spomedzi čísel $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ existovať jedno, bez ujmy na všeobecnosti nech to je x_{k+1} , ktoré je aspoň 1 a jedno, ktoré je najviac jedna, nech to je x_k .

Zoberme si k čísel $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k \cdot x_{k+1}$. Súčin týchto čísel je $x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k x_{k+1} = 1$ a preto podľa indukčného predpokladu platí

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} \geq k$$

a po pripočítaní jednotky platí tiež

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} + 1 \geq k + 1$$

Teraz nám stačí ukázať, že platí

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} + 1. \quad (1)$$

Túto nerovnosť si však vieme ekvivalentne upraviť nasledovne

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} &\geq x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} + 1, \\ x_k + x_{k+1} &\geq x_k x_{k+1} + 1, \\ 0 &\geq x_k x_{k+1} - x_k - x_{k+1} + 1, \\ 0 &\geq (x_k - 1)(x_{k+1} - 1), \end{aligned}$$

a to platí, keďže $x_k \leq 1$ (a teda $x_k - 1 \leq 0$) a $x_{k+1} \geq 1$ (a teda $x_{k+1} - 1 \geq 0$).

Tým je dôkaz hotový. Pre lepšiu jasnosť ešte uvedieme, že sme dokázali toto:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} + 1 < k + 1,$$

kde platnosť prvej nerovnosti vyplýva z platnosti (1) a platnosť druhej nerovnosti vyplýva z indukčného predpokladu.

Riešenie úlohy 15

Tvrdenie dokážeme úplnou matematickou indukciou.

Báza. Pre $n = 1$ máme jednu kôpku s 1 žetónom, čiže sme skončili a získali sme $0 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0$ bodov, čiže tvrdenie platí.

Indukčný krok Uvažujme celé číslo $k \geq 2$.

Predpokladáme, že pre každé $n \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ platí, že ak začíname s kôpkou s n žetónmi, tak po ľubovoľnej postupnosti krokov podľa zadania získame $\frac{1}{2}n(n-1)$ bodov (indukčný predpoklad).

Teraz dokážeme, že rovnaký záver platí pre kôpku s k žetónmi. V prvom kroku rozdelíme kôpku na dve kôpky, jednu s ℓ žetónmi a druhú s $k-\ell$ žetónmi, pričom získame $\ell(k-\ell)$ bodov. Ďalej budeme robiť kroky s týmito dvomi kôpkami. Keďže tieto dve kôpky sú nezávislé a $1 \leq k, k\ell \leq k-1$, tak z indukčného predpokladu vieme, že z prvej kôpky veľkosti ℓ získame $\frac{1}{2}\ell(\ell-1)$ bodov a z druhej kôpky veľkosti $k-\ell$ získame $\frac{1}{2}(k-\ell)(k-\ell-1)$ bodov. Náš celkový zisk bodov tak je

$$\begin{aligned} \ell(k-\ell) + \frac{1}{2}\ell(\ell-1) + \frac{1}{2}(k-\ell)(k-\ell-1) &= \\ \frac{1}{2} \cdot [2\ell(k-\ell) + \ell(\ell-1) + (k-\ell)(k-\ell-1)] &= \\ \frac{1}{2} \cdot [2k\ell - 2\ell^2 + \ell^2 - \ell + k^2 - k\ell - k - k\ell + \ell^2 + \ell] &= \\ \frac{1}{2}(k^2 - k). \end{aligned}$$

A to sme mali dokázať. Dôkaz úplnou mat. indukciou je tak hotový.

Riešenie úlohy 16

Skôr než sa pustíme do dôkazu, tak si uvedomme, že ak z každého n -uholníka dostaneme aspoň $n - 2$ trojuholníkov, tak aj z každého k -uholníka pre $k > n$ musíme dostať aspoň $n - 2$ trojuholníkov. Je tomu tak preto, lebo každý n uholník možno brať ako špeciálny prípad k -uholníka, kde niektoré jeho vrcholy ležia na priamke. Uvažovanie takýchto degenerovaných k -uholníkov nám dôkaz neovplyvní.

Tvrdenie zo zadania dokážeme úplnou matematickou indukciou. Pre $n = 3$ rozdeľujeme trojuholník a zjavne po ľubovoľnom rozdelení dostaneme aspoň $1 = n - 2$ trojuholníkov.

Predpokladajme, že pre každé celé k , kde $3 \leq k < n$, platí: Ak rozdelíme konvexný k -uholník priamkami na trojuholníky, tak dostaneme aspoň $k - 2$ trojuholníkov. Uvažujme teraz ľubovoľný konvexný n -uholník a ľubovoľné jeho rozdelenie priamkami na trojuholníky. Vyberme si jednu priamku. Tá ho vďaka konvexnosti rozdelí na a -uholník a b -uholník (oba opäť konvexné) pre nejaké celé čísla $a, b \geq 3$. Spočítaním vrcholov vzniknutých mnohouholníkov započítame isto každý vrchol n -uholníka a dva spoločné vrcholy a - a b -uholníka započítame dvakrát. Preto $a + b \geq n + 2$. Ak $a < n$ aj $b < n$, tak z indukčného predpokladu vyplýva, že po rozdelení a -uholníka nám musí vzniknúť aspoň $a - 2$ trojuholníkov a z b -uholníka aspoň $b - 2$ trojuholníkov. Spolu tak dostávame aspoň

$$a - 2 + b - 2 = a + b - 4 \geq n + 2 - 4 = n - 2 \quad \text{trojuholníkov,}$$

čo sme mali dokázať.

Čo ak neplatí $a < n \wedge b < n$? Bez ujmy na všeobecnosti nech $a \geq n$. Potom z a -uholníka musí vzniknúť aspoň toľko trojuholníkov ako z $(n - 1)$ -uholníka, čo je z indukčného predpokladu aspoň $n - 3$. Z b -uholníka musí vzniknúť aspoň jeden. Dostávame tak, že rozhodne musíme dostať aspoň $n - 3 + 1 = n - 2$ trojuholníkov. Tým je indukčný krok dokázaný.

Riešenie úlohy 17

Báza Čísla 0, 1 a 2 zapíšeme nasledovne

- 0 zapíšeme cez prázdnu postupnosť,
- $1 = 1 \cdot 4^0$,
- $2 = 6 \cdot 4^0 - 1 \cdot 4^1$.

Indukčný krok Teraz uvažujme prirodzené číslo $n \geq 3$.

(IP) Predpokladajme, že pre každé prirodzené číslo t , $0 \leq t < n$ existuje prirodzené číslo ℓ a postupnosť $b_0, b_1, \dots, b_{\ell-1}$ čísel z $\{-1, 1, 4, 6\}$ taká, že

$$t = \sum_{i=0}^{\ell-1} b_i \cdot 4^i.$$

Teraz dokážeme nájsť takú postupnosť aj pre číslo n . Označme $c_0 = 4$, $c_1 = 1$, $c_2 = 6$ a $c_3 = -1$. Všimnime si, že pri tomto označení platí $c_i \bmod 4 = i$ pre každé $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Preto ak položíme $z = n \bmod 4$, tak číslo

$$m = \frac{n - c_z}{4}$$

bude celé. Taktiež platí

- $m < n$, nakoľko je to ekvivalentné s $n > -c_z/3$, čo platí kvôli $n \geq 3 > 1/3 \geq -c_z/3$;
- $m \geq 0$, čo zjavne platí pre $c_z \in \{-1, 1\}$, pre $c_z = 4$ musíme mať $n \geq 4$ (keďže vtedy $n \bmod 4 = 0$) a tak $(n - 4)/4 \geq 0$, a podobne pre $c_z = 6$ máme $n \geq 6$ a tiež $(n - 6)/4 \geq 0$.

Preto podľa IP pre číslo m existuje postupnosť $b_0, b_1, \dots, b_{\ell-1}$ čísel z $\{-1, 1, 4, 6\}$ taká, že

$$m = \frac{n - c_z}{4} = \sum_{i=0}^{\ell-1} b_i \cdot 4^i.$$

Teda keď položíme $k = \ell + 1$, $a_0 = c_z$ a $a_{i+1} = b_i$ pre všetky $i \in \{0, 1, \dots, \ell - 1\}$, tak dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{n - a_0}{4} &= \sum_{i=0}^{k-2} a_{i+1} \cdot 4^i, \\ n &= a_0 + 4 \cdot \sum_{i=0}^{k-2} a_{i+1} \cdot 4^i = a_0 + \sum_{i=0}^{k-2} a_{i+1} \cdot 4^{i+1} = a_0 + \sum_{i=1}^{k-1} a_i \cdot 4^i, \\ n &= \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot 4^i. \end{aligned}$$

Tým sme pre číslo n našli želanú postupnosť.

Program Tento dôkaz vieme priamo prepísať do rekurzívnej funkcie, ktorá nám pre zadané číslo n vráti hľadanú postupnosť čísel. Pre efektivitu a jednoduchšiu implementáciu bude vracat túto postupnosť v opačnom poradí.

```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;
const int c[] = {4, 1, 6, -1};

vector<int> transform(int n) {
    if (n == 0) {
        return {};
    }
    if (n == 1) {
        return {1};
    }
    if (n == 2) {
        return {-1, 6};
    }
    int cz = c[n % 4];
    int m = (n - cz) / 4;
    auto res = transform(m);
    res.push_back(cz);
    return res;
}

int main() {
    int n;
    cin >> n;
    auto res = transform(n);
    for (int i = res.size() - 1; i >= 0; i--) {
        cout << res[i] << ' ';
    }
    cout << endl;
}
```

Matematickou indukciou sme vlastne aj dokázali, že tento program je korektný, teda že sa táto rekúzia vždy skončí a dá nám správny výsledok – preto je tento dôkaz o kus dlhší ako samotná rekurentná funkcia, a to o čast', kde sme zdôvodňovali, že $0 \leq m < 0$ (čo je potrebné pre skončenie rekúzie) a koncové výpočty (zaručujúce správnosť).

Riešenie úlohy 18

Tvrdenie dokážeme úplnou matematickou indukciou.

Báza. Pre $n = 0$ vyjadríme číslo 0 ako súčet 0 Fibonacciho čísel, resp. ako $0 = F_0$.

Indukčný krok. Vezmime si teraz $n \geq 1$ a predpokladajme, že

IP: Každé číslo menšie ako n vieme zapísať ako súčet navzájom rôznych Fibonacciho čísel.

Dokážme, že aj n vieme tak zapísať. Nech k je najväčšie prirodzené číslo, pre ktoré platí $F_k \leq n$ – také zjavne existuje, nakoľko berieme maximum z neprázdnej (lebo $F_2 = 1 \leq n$), ohraničenej (pomocou n) množiny. Nakoľko $n \geq F_2$, tak máme $k \geq 2$. Keďže $n - F_k < n$, tak z indukčného predpokladu vieme číslo $n - F_k$ zapísať ako súčet navzájom rôznych Fibonacciho čísel. Ak k nim pridáme číslo F_k , dostaneme vyjadrenie čísla n ako súčet Fibonacciho čísel.

$$n = \text{vyjadrenie } n - F_k \text{ cez Fibonacciho čísla} + F_k.$$

Ukážeme, že vyjadrenie $n - F_k$ neobsahuje číslo F_k . Pre spor predpokladajme opak. Potom

$$n - F_k \geq F_k.$$

S využitím toho, že Fibonacciho postupnosť je neklesajúca, teda $F_k \geq F_{k-1}$ pre všetky $k \geq 1$, máme

$$n \geq F_k + F_k \geq F_k + F_{k+1} = F_{k+1}.$$

Tak sme zistili, že $F_{k+1} \leq n$. To je spor s tým, že k je najväčšie také číslo, pre ktoré $F_k \leq n$. Teda naše vyjadrenie čísla n obsahuje navzájom rôzne Fibonacciho čísla, čím je indukčný krok dokončený.

Dôkaz toho, že Fibonacciho postupnosť je neklesajúca, sme nevyžadovali. Avšak je to tiež dobrý tréning dokazovania. Môžete si skúsiť. Totiž priamo z ich definície to nevyplýva. Vyplýva to však z toho, že Fibonacciho čísla sú nezáporné, čo sa ľahko dokáže indukciou.

Riešenie úlohy 19

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa n . Pre $n = 1$ postupnosť môže kvôli podmienke (i) obsahovať najviac jeden člen, teda $k \leq 1$.

Predpokladajme teraz, že tvrdenie zo zadania platí pre každé $n \in \{1, 2, \dots, t\}$. Dokážeme, že potom tvrdenie platí aj pre $n = t+1$. Nech $A = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ je postupnosť prvkov nejakej $(t+1)$ -prvkovej množiny M . Označme si $a_1 = x$ a nech $x_1 = a_1, x_2, \dots, x_s$ sú všetky výskyty prvku x v postupnosti A . Postupnosť A si potom vieme zapísať ako

$$x_1, P_1, x_2, P_2, x_3, \dots, x_{s-1}, P_{s-1}, x_s, P_s,$$

kde $P_1, P_2, \dots, P_s$ sú postupnosti prvkov z množiny M . Pre $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ si označíme dĺžku postupnosti P_i ako k_i a počet jej rôznych prvkov ako n_i . Zjavne $k_1 + k_2 + \dots + k_s = k - s$.

Pre každé $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$ platí $k_i > 0$, a teda aj $n_i > 0$ (teda postupnosť P_i je neprázdna), lebo postupnosť A nemôže obsahovať dva prvky x vedľa seba. Taktiež sa nemôže stať, že by nejaké dve rôzne postupnosti P_i a P_j mali rovnaký prvok, lebo to by porušilo podmienku (ii) pre postupnosť A . Všetky postupnosti P_i preto obsahujú navzájom disjunktné prvky (navyššie rôzne od x). Tým pádom platí $n_1 + n_2 + \dots + n_s \leq t$.

Pre každú postupnosť P_i , kde $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$, vieme použiť indukčný predpoklad, čím dostaneme $k_i \leq 2n_i - 1$. Ak $n_s > 0$, tak z indukčného predpokladu pre postupnosť P_s dostávame $k_s \leq 2n_s - 1$. Ak $n_s = 0$, tak zjavne $k_s = 0$. V oboch prípadoch nám však platí $k_s \leq 2n_s$. Spojením týchto tvrdení dostávame

$$\begin{aligned} k &= s + k_1 + k_2 + \dots + k_{s-1} + k_s \leq s + 2n_1 - 1 + 2n_2 - 1 + \dots + 2n_{s-1} - 1 + 2n_s = \\ &= s + 2(n_1 + n_2 + \dots + n_s) - (s - 1) = 2t + 1. \end{aligned}$$

Teda $k \leq 2t + 1 = 2(t + 1) - 1$, čo sme chceli dokázať.