

Cvičenie 2: Dirichletov princíp

Dirichletov princíp vo svojej základnej verzii vyjadruje jednoduché pozorovanie, že po priradení n objektov do $m < n$ priecinkov bude aspoň jeden priecinok obsahovať aspoň dva objekty. Ak teda napríklad n holubov používa $m < n$ holubníkových dier (holubníkov), tak aspoň jednu z dier musia používať najmenej dva holuby (preto je niekedy reč aj o *holubníkovom princípe*, angl. *Pigeonhole principle*).

Jeden zo spôsobov, ako formalizovať tento princíp, je cez množiny.

Veta 1 (Dirichletov princíp – cez množiny). *Nech B je konečná množina veľkosti m a pre n množín $A_1, A_2, \dots, A_n$ platí $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = B$. Ak $m > n$, tak existuje $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ také, že $|A_i| \geq 2$.*

Iným spôsobom sú zobrazenia. Priradenie n objektov do m priecinkov možno sformalizovať ako zobrazenie $f: A \rightarrow B$ medzi konečnými množinami A a B takými, že $|A| = n$ a $|B| = m$. Základná verzia Dirichletovho princípu potom hovorí, že ak $m < n$, tak takéto zobrazenie nemôže byť injektívne.

Veta 2 (Dirichletov princíp – cez zobrazenia). *Nech A a B sú konečné množiny také, že $|A| = n$, $|B| = m$ a $n > m$. Potom neexistuje žiadne injektívne zobrazenie $f: A \rightarrow B$.*

Pripomíname, že zápis $d \mid a$, číslo d delí číslo a , znamená, že existuje celé číslo k , pre ktoré platí $a = kd$. V niektorých úlohách budeme hovoriť o zvyškoch po delení nejakým číslom d nasledovným spôsobom.

Definícia 1. Pre celé čísla a, b, d píšeme

$$a \equiv b \pmod{d}$$

a hovoríme, že a je kongruentné s b modulo d , pokiaľ $d \mid a - b$, teda pokiaľ a a b majú rovnaký zvyšok po delení d . (Ako ste mohli vidieť na UDDŠ, ide o reláciu ekvivalencie na $\mathbb{Z}$.)

→ **Úloha 1.** Majme 5 (nie nutne rôznych) prirodzených čísel. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dve, ktorých rozdiel je deliteľný štyrmi.

→ **Úloha 2.** Majme 101 (nie nutne rôznych) trojciferných prirodzených čísel. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dve, ktoré sa zhodujú v posledných dvoch cifrách (dekadického zápisu).

Úloha 3. Majme $n + 1$ (nie nutne rôznych) prirodzených čísel $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať čísla a_i a a_j tak, že $i \neq j$ a $a_i - a_j \equiv 0 \pmod{n}$.

Úloha 4. Predpokladajme, že Bratislava má 419678 obyvateľov, z ktorých žiaden nemá viac ako 1000 rokov. Dokážte, že aspoň dvaja Bratislavčania sa narodili v rovnaký deň rovnakého roku.

Úloha 5. Majme 52 prirodzených čísel $a_1, \dots, a_{52}$, ktorých zvyšky po delení číslom 100 sú po dvoch rôzne. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať čísla a_i a a_j tak, že $i \neq j$ a $a_i + a_j \equiv 0 \pmod{100}$.

→ **Úloha 6.** Majme 52 (nie nutne rôznych) prirodzených čísel $a_1, \dots, a_{52}$. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať čísla a_i a a_j tak, že $i \neq j$ a $a_i + a_j \equiv 0 \pmod{100}$ alebo $a_i - a_j \equiv 0 \pmod{100}$.

Úloha 7. Nech $(a_1, \dots, a_n)$ je konečná postupnosť prirodzených čísel. Dokážte, že z nej možno vybrať neprázdnu súvislú podpostupnosť $(a_{i+1}, \dots, a_j)$ ($i < j$) tak, aby bol súčet $a_{i+1} + \dots + a_j$ členov tejto podpostupnosti deliteľný číslom n .

Úloha 8. Nech $n \geq 1$ je prirodzené číslo. Z množiny $\{1, \dots, 2n\}$ vyberme ľubovoľných $n+1$ (rôznych) čísel. Dokážte, že medzi vybranými číslami musia existovať dve, ktoré majú rozdiel 1.

Úloha 9. Majme $2^{n-4} + 1$ n -bitových binárnych vektorov (teda postupností núl a jednotiek). Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dva, ktoré sa líšia v najviac štyroch bitoch.

→ **Úloha 10.** Vo vnútri rovnostranného trojuholníka o strane dĺžky 2 sa nachádza päť bodov. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dvojicu bodov, ktoré sú od seba vo vzdialenosti najviac 1.

Úloha 11. Vlk zje každý deň aspoň jednu ovcu, no najviac tri ovce. Medveď zje každý deň aspoň štyri ovce, no najviac sedem oviec. Dokážte, že v každom týždni existujú dva dni, keď bača utrpí rovnakú škodu.

Úloha 12. Počas deviatich kalendárnych týždňov zje vlk každý deň aspoň jednu ovcu, no v každom z deviatich kalendárnych týždňov zje najviac 12 oviec. Dokážte, že existuje úsek po sebe idúcich dní, počas ktorého zje vlk presne 15 oviec.

Úloha 13. Desať ľudí si posadalo za okrúhly stôl. Každý z nich dostal raňajky so svojou menovkou. Potom sa všetci postavili a náhodne sa presadili tak, aby nikto nesedel pred svojimi raňajkami.

→ a) Dokážte, že vieme vždy otočiť stôl tak, že aspoň dvaja budú mať pred sebou svoje jedlo.

→ b) Vieme vždy otočiť stôl tak, že aspoň traja budú mať pred sebou svoje jedlo?

c) Vyriešte úlohy a), b) pre prípad, keď za stolom je 11 ľudí.

Predmetom nasledujúcich úloh sú určité kombinatorické konfigurácie, ku ktorým možno jednoznačne priradiť ich rádu (prirodzené číslo $n \in \mathbb{N}$). Konfiguráciou rádu n môže byť napríklad postupnosť n hodov niekoľkými hracími kockami alebo umiestnenie n figúrok na šachovnicu.

Nasledujúce zadania navyše majú vlastnosť, že istá situácia v nich nutne nastáva pre všetky konfigurácie rádu $n \geq n_0$, kým pre konfigurácie rádu $n < n_0$ táto situácia v aspoň jednom prípade nenastáva (zo zadania je väčšinou ľahko vidieť, že takáto „prahová hodnota“ n_0 skutočne existuje). Úlohou je zakaždým nájsť *najmenšie* n také, že daná situácia nastáva pre všetky konfigurácie rádu n (hodnotu n_0), prípadne *najväčšie* n také, že daná situácia ešte pre niektorú konfiguráciu rádu n nenastáva ($n_0 - 1$).

Dôkaz, že hodnota $x \in \mathbb{N}$ je skutočne hľadaným n_0 (resp. $n_0 - 1$) pozostáva z dvoch častí:

(i) Treba dokázať, že $x \leq n_0$ (resp. $x \leq n_0 - 1$) a x je tak dolným odhadom n_0 (resp. $n_0 - 1$): pre $x - 1$ (resp. pre x) ešte daná situácia v aspoň jednej konfigurácii nenastáva.

(ii) Treba tiež dokázať, že $x \geq n_0$ (resp. $x \geq n_0 - 1$) a x je tak horným odhadom n_0 (resp. $n_0 - 1$): pre x (resp. pre $x + 1$) musí daná situácia nutne nastať vo všetkých konfiguráciách.

Dôkaz nerovnosti (i) je väčšinou pomerne jednoduchý, keďže stačí prísť s konkrétnym príkladom konfigurácie rádu $x - 1$ (resp. x), pre ktorú daná situácia nenastáva. Na dôkaz nerovnosti (ii) je zvyčajne potrebné využiť všeobecné dôkazové techniky. Jednou z nich je Dirichletov princíp a práve na tie sa tu sústredíme.

V šachových úlohách budeme hovoriť, že dve figúrky sa ohrozujú práve vtedy, keď jedna z nich vie urobiť ťah na pozíciu obsadenú druhou z nich. Farby figúriek nás nezaujímajú, pokiaľ nie je napísané inak.

Úloha 14. Koľko najmenej hodov dvoma hracími kockami je nutných na to, aby zaručene aspoň dvakrát padol rovnaký súčet?

Úloha 15. Koľko najmenej hodov k hracími kockami je nutných na to, aby zaručene aspoň dvakrát padol rovnaký súčet?

→ **Úloha 16.** Koľko najviac veží možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadne dve neohrozovali?

→ **Úloha 17.** Koľko najviac strelcov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Úloha 18. Koľko najviac jazdcov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Úloha 19. Koľko najviac bielych pešiakov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali (za predpokladu, že biely pešiak môže stáť aj v ôsmom rade)?

Úloha 20. *Špecializovaný strelce-expert* je šachová figúrka, ktorá sa môže hýbať iba po diagonálach rovnobežných s diagonálou a1-h8. Prípustné sú teda práve všetky ťahy po diagonále v smere „doprava hore“ alebo „dole dole“. Koľko najviac špecializovaných strelcov-expertov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Úloha 21. *Prehnane iniciatívny strelce* je šachová figúrka, ktorej jeden ťah pozostáva z ľubovoľného nenulového počtu ťahov bežného strelca. Koľko najviac prehnane iniciatívnych strelcov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

→ **Úloha 22.** Koľko najmenej čísel musíme vybrať z množiny $\{1, \dots, 20\}$, aby medzi vybranými číslami zaručene existovali dve, z ktorých jedno delí to druhé?

Úloha 23. Vyriešte predošlú úlohu pre množinu $\{1, \dots, n\}$.

Veta 3 (Frekvenčná forma Dirichletovho princípu). *Nech A a B sú konečné množiny také, že $|A| = n$, $|B| = m \geq 1$ a $n/m > r - 1$ pre nejaké $r \in \mathbb{N}$. Potom pre ľubovoľné zobrazenie $f: A \rightarrow B$ existuje prvok $b \in B$ taký, že $f(a) = b$ pre aspoň r rôznych prvkov $a \in A$.*

Úloha 24. Dokážte, že pri devätnástich hodoch hracou kockou musí aspoň štyrikrát padnúť rovnaké číslo.

→ **Úloha 25.** Koľko najmenej hodov dvoma hracími kockami je nutných na to, aby zaručene aspoň štyrikrát padol rovnaký súčet?

Úloha 26. Koľko najmenej hodov k hracími kockami je nutných na to, aby zaručene aspoň štyrikrát padol rovnaký súčet?

→ **Úloha 27.** Dokážte, že z ľubovoľného rozostavenia 33 veží na (štandardnej) šachovnici možno vybrať päť veží tak, aby sa žiadne dve z nich neohrozovali, a to ani potom, čo zo šachovnice odstránime zvyšné nevybrané veže.

Úloha 28. Dokážte, že z ľubovoľného rozostavenia $k \in \{0, 1, \dots, 64\}$ veží na (štandardnej) šachovnici možno vybrať $\lceil k/8 \rceil$ veží tak, aby sa žiadne dve z nich neohrozovali, a to ani potom, čo zo šachovnice odstránime zvyšné nevybrané veže.

Úloha 29. Dokážte, že z ľubovoľného rozostavenia deviatich strelcov na (štandardnej) šachovnici možno vybrať dvoch strelcov tak, aby sa neohrozovali, a to ani potom, čo zo šachovnice odstránime zvyšných nevybraných strelcov. Nájdite vhodné zovšeobecnenie tohto tvrdenia pre $k \in \{0, 1, \dots, 64\}$ strelcov.

Úloha 30. Nájdite najmenšie také číslo k pre ktoré platí, že v každej k -prvkovej podmnožine množiny $\{1, 2, \dots, 100\}$ sa nachádzajú tri čísla, ktoré majú spoločnú cifru (spoločná cifra musí byť rovnaká pre všetky tri, ale môže v nich byť na rôznych pozíciách, napr. čísla 12, 31 a 17 majú spoločnú cifru 1, ale čísla 42, 47 a 27 nemajú spoločnú cifru). Vaše tvrdenie dokážte.

Úloha 31. Nájdite najmenšie kladné celé číslo k také, že z každého rozmiestnenia k strelcov na šachovnici 8×8 možno vybrať troch strelcov, ktorí sa neohrozujujú, a to ani potom, čo zo šachovnice odstránime zvyšných nevybraných strelcov.

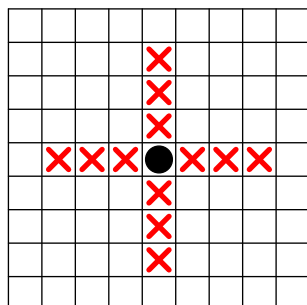
Úloha 32. Výber niekoľkých množín nazývame *podozrivým*, pokiaľ niektorá z vybraných množín je podmnožinou inej vybranej množiny. Nájdite najväčšie také celé číslo k , pre ktoré možno vybrať k navzájom rôznych podmnožín množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tak, aby tento výber nebol podozrivý. Vaše tvrdenie dokážte.

Úloha 33. Figúrka *miniveža* ohrozuje políčka, ktoré sa nachádzajú v rovnakom riadku alebo stĺpci ako ona sama a zároveň sú od nej vzdialené najviac tri políčka (pozri obrázok). Koľko najviac miniveží možno umiestniť na šachovnicu rozmerov

a) 8×8 ,

b) 9×9

tak, aby sa žiadne dve miniveže navzájom neohrozovali.



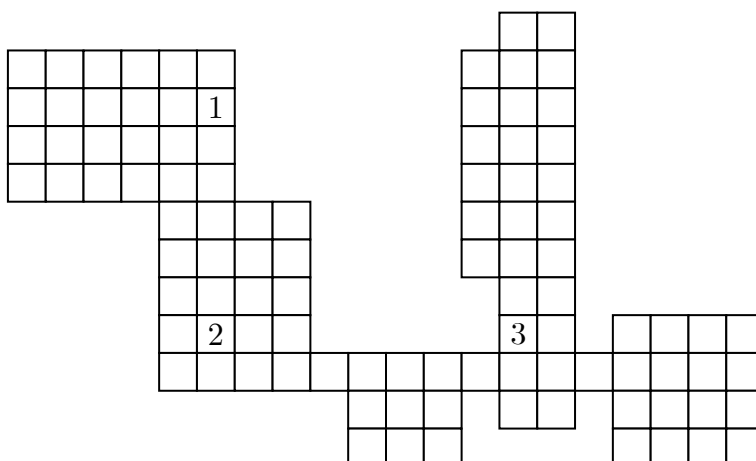
Úloha 34. Koľko najmenej čísel (navzájom rôznych) musíme vybrať z množiny $\{1, 2, \dots, 22\}$, aby zaručene existovala dvojica čísel, ktorých rozdiel je 3, 4 alebo 7. Vaše tvrdenie dokážte.

Bonus. Vyriešte úlohu všeobecne pre množinu $\{1, 2, \dots, n\}$.

Úloha 35. Koľko najmenej rôznych čísel musíme vybrať z množiny $\{1, 2, \dots, 100\}$, aby medzi vybranými číslami zaručene existovala dvojica čísel, ktorých rozdiel je zložené číslo? Vaše tvrdenie dokážte.

Poznámka. Zložené číslo je také číslo, ktoré má aspoň troch kladných deliteľov.

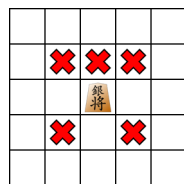
Úloha 36. Uvažujme plán MatFyzu ako na obrázku nižšie. Koľko najviac veží vieme umiestniť na políčka tohto plánu tak, aby sa žiadne dve neohrozovali? Vaše tvrdenie zdôvodnite. Veža ohrozuje políčka, na ktoré sa vie pohnúť tak, že ostane vo svojom riadku alebo stĺpci a pritom nevyjde mimo MatFyz (teda veže 1 a 2 sa ohrozujú, ale 2 a 3 nie).



Úloha 37. (3 body) Nájdite najmenšie číslo n , pre ktoré platí nasledovné tvrdenie: Z ľubovoľného rozmiestnenia n kráľov na šachovnici 8×8 možno vybrať piatich, z ktorých sa žiadni dvaja neohrozujú. Správnosť vášho tvrdenia dokážte.

Poznámka. Dvaja kráľi sa ohrozujú, ak sa nachádzajú na políčkach, ktoré majú spoločný vrchol alebo stranu.

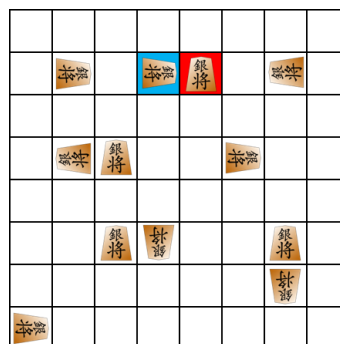
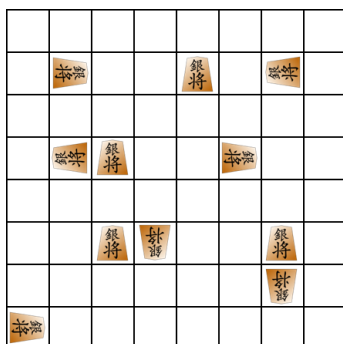
Úloha 38. Figúrka *strieborný generál* (pochádza z japonského šachu) ohrozuje štyri políčka, s ktorými má spoločný iba roh a jedno políčko priamo pred sebou (ako na obrázku 1). Figúrku možno otáčať do 4 smerov, pričom figúrka má vyznačené, na ktorej strane má predok.



Obr. 1: Políčka, ktoré ohrozuje strieborný generál.

Najviac koľko strieborných generálov možno umiestniť na šachovnicu rozmerov 8×8 tak, aby žiaden strieborný generál neohrozoval iného?

Na obrázku vľavo možno vidieť príklad rozmiestnenia 11 strieborných generálov, z ktorých žiaden neohrozuje iného. Na obrázku vpravo zas generál na modrom políčku ohrozuje generála na červenom políčku.



Bonus. V závislosti od kladného celého čísla n určte, aké je riešenie úlohy pre šachovnicu rozmerov $n \times n$.

Úloha 39. Na salaši sa pasie 100 oviec. Vlk zje každý deň aspoň jednu ovцу a za n dní ich zje všetky. Určte najmenšiu hodnotu n , pre ktorú zaručenie existuje súvislý úsek dní, kedy vlk zje presne 20 oviec. (Aj jeden deň považujeme za súvislý úsek dní.)

Časté chyby

Úlohy tohto štýlu sa dajú riešiť rôznymi spôsobmi. Avšak treba byť na pozore, lebo mnohé z nich sú nesprávne.

Úloha 34: výber čísel

Koľko najmenej čísel (navzájom rôznych) musíme vybrať z množiny $\{1, 2, \dots, 22\}$, aby zaručene existovala dvojica čísel, ktorých rozdiel je 3, 4 alebo 7. Vaše tvrdenie dokážte.

Nesprávne riešenie 1

Vybrať 8 čísel nám nestačí: 1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22 – medzi týmito číslami nenájde rozdiel 3, 4, ani 7. Ak by sme pridali hocikaké deviate číslo, tak by už malo s niektorým z nich rozdiel 3, 4 alebo 7:

$$\begin{array}{ll} 4 - 1 = 3 & 14 - 11 = 3 \\ 5 - 2 = 3 & 15 - 12 = 3 \\ 6 - 3 = 3 & 16 - 13 = 3 \\ 7 - 3 = 4 & 17 - 13 = 4 \\ 8 - 1 = 7 & 18 - 11 = 7 \\ 9 - 2 = 7 & 19 - 12 = 7 \\ 10 - 3 = 7 & 20 - 13 = 7 \end{array}$$

Nesprávne riešenie 2

Vyberieme čo najviac čísel tak, aby medzi nimi nebol rozdiel 3, 4 ani 7. Aby sme vybrali čo najviac čísel, tak začneme vyberať čo najmenšie čísla, teda 1, 2, 3. Teraz nemôžeme vybrať čísla 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, lebo by sme dostali zakázaný rozdiel ($4 - 1 = 3$, $5 - 2 = 3$, $6 - 3 = 3$, $7 - 3 = 4$, $8 - 1 = 7$, $9 - 2 = 7$, $10 - 3 = 7$). Čísla 11, 12, 13 už vybrať vieme, tak ich vyberieme. Vybrať miesto nich väčšie čísla sa nám neoplatí. Po ich výbere z rovnakého dôvodu nemôžeme vybrať čísla 14 až 20. Na koniec nám ešte ostanú na výber čísla 21 a 22.

Vybrali sme tak 8 čísel 1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22. Keďže sme vyberali čísla najoptimálnejšie, tak sa viac už nedá vybrať. Preto hocikaký výber 9 čísel bude obsahovať dve čísla s rozdielom 3, 4 alebo 7. Treba teda vybrať najmenej 9 čísel.

Nesprávne riešenie 3

Vyberieme čo najviac čísel tak, aby medzi nimi nebol rozdiel 3, 4 ani 7. Pre každé číslo si pod neho vypíšeme všetky iné čísla, ktoré s ním dávajú zakázaný rozdiel:

číslo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
rozdiel -7					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15			
rozdiel -4																						
rozdiel -3				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
rozdiel 3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22			
rozdiel 4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22				
rozdiel 7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22							
počet	3	3	3	4	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	5	5	5	4	3	3	3

Aby sme dostali čo najviac čísel, tak sa nám oplatí vybrať čísla, ktoré tvoria zakázaný rozdiel s čo najmenej číslami. To sú čísla 1, 2, 3, 20, 21, 22. Všetky vybrať môžeme, tak ich vyberieme. Takto nám ostanú len čísla 11 a 12 – to sú jediné čísla, ktoré vo svojom stĺpci nemajú žiadne z už vybraných čísel. Tak vyberieme ešte tieto dve.

Vybrali sme tak 8 čísel 1, 2, 3, 11, 12, 20, 21, 22. Keďže sme vyberali čísla najoptimálnejšie, tak sa viac už nedá vybrať. Preto hocikaký výber 9 čísel bude obsahovať dve čísla s rozdielom 3, 4 alebo 7. Treba teda vybrať najmenej 9 čísel.

Pred ďalším čítaním odporúčame najprv nájsť chyby v uvedených riešeniach. Pokiaľ máte s tým ťažkosti alebo si nie ste istí, tak vám ešte pomôžeme nasledovnou podobnou úlohou.

Úloha 40. Koľko najmenej čísel (navzájom rôznych) musíme vybrať z množiny $\{1, 2, \dots, 17\}$, aby zaručene existovala dvojica čísel, ktorých rozdiel je 2, 3, 5 alebo 7. Vaše tvrdenie dokažte.

Akoby by vyzerali uvedené nesprávne riešenia na tejto úlohe? Nižšie uvedieme takéto analógie k 2. a 3. nesprávnemu riešeniu.

Nesprávne riešenie podľa 2. riešenia

Vyberieme čo najviac čísel tak, aby medzi nimi nebol rozdiel 2, 3, 5 ani 7. Aby sme vybrali čo najviac čísel, tak začneme vyberať čo najmenšie čísla, teda 1, 2. Teraz nemôžeme vybrať čísla 4, 5, 6, 7, 8, 9, lebo by sme dostali zakázaný rozdiel: $3 - 1 = 2$, $4 - 2 = 2$, $5 - 2 = 3$, $6 - 1 = 5$, $7 - 2 = 5$, $8 - 1 = 7$, $9 - 2 = 7$. Čísla 10 a 11 už vybrať vieme, tak ich vyberieme. Potom nám už neostane žiadne voľné číslo ($12 - 10 = 2$, $13 - 11 = 2$, $14 - 11 = 3$, $15 - 10 = 5$, $16 - 11 = 5$, $17 - 10 = 7$).

Vybrali sme tak 4 čísla 1, 2, 10, 11. Keďže sme vyberali čísla najoptimálnejšie, tak sa viac už nedá vybrať. Preto hocikáky výber 5 čísel bude obsahovať dve čísla s rozdielom 2, 3, 5 alebo 7. Treba teda vybrať najmenej 5 čísel.

Nesprávne riešenie podľa 3. riešenia

Vyberieme čo najviac čísel tak, aby medzi nimi nebol rozdiel 2, 3, 5 ani 7. Pre každé číslo si pod neho vypíšeme všetky iné čísla, ktoré s ním dávajú zakázaný rozdiel:

číslo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
								1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
						1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17		
	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17			
	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17					
	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17							
počet	4	4	5	6	6	7	7	8	8	8	7	7	6	6	5	4	4

Aby sme dostali čo najviac čísel, tak sa nám oplatí vybrať čísla, ktoré tvoria zakázaný rozdiel s čo najmenej číslami. To sú čísla 1, 2, 16 a 17. Všetky vybrať môžeme, tak ich vyberieme. Takto nám už neostanú na výber žiadne ďalšie čísla.

Vybrali sme tak 4 čísla 1, 2, 16, 17. Keďže sme vyberali čísla najoptimálnejšie, tak sa viac už nedá vybrať. Preto hocikáky výber 5 čísel bude obsahovať dve čísla s rozdielom 2, 3, 5 alebo 7. Treba teda vybrať najmenej 5 čísel.

V čom sú teda chyby? Žiaľ, vo výsledku nie. Riešením úlohy 34 je naozaj, že treba vybrať 9 čísel. Čiže všetky tri nesprávne postupy prišli k správnomu výsledku. Avšak to už neplatí pri úlohe 40. Tam sa totiž dá vybrať až 5 čísel, a to:

1, 5, 9, 13, 17.

Na riešeníach úlohy 40 si môžeme všimnúť, že sú naozaj myšlienково rovnaké s 2. a 3. nesprávnym riešením. A keďže tieto logické úvahy nás priviedli pri inej úlohe k nesprávnemu výsledku, tak musia byť nesprávne. Poďme si však bližšie ukázať, v čom je problém.

- **Nesprávne riešenie 1** uvádza príklad výberu 8 čísel. No príklad nie je dôkaz, že **každý** výber 9 čísel obsahuje dve čísla s chceným rozdielom. Pri takýchto maximalizačných úlohách (tu hľadáme najviac čísel bez daného rozdielu) sa bežne stáva, že existuje veľa výberov, do ktorých sa nedá už nič pridať a majú rôzne veľkosti. Len z jedného výberu nevieme usúdiť, že je najlepší.
- **Nesprávne riešenie 2** vlastne tiež uvádza len jeden konkrétny príklad 8 čísel. Rozdiel je v tom, že tento príklad nepadol z neba, ale prišli sme naň istým algoritmom. Ten síce pôsobí, že je „optimálny“ a že nájde najlepší výber. No ako sme videli na podobnej úlohe, nie je to vo všeobecnosti tak. Takéto algoritmy sa nazývajú *pažravé* (angl. *greedy*) a je o nich známe, že vo

všeobecnosti nemusia viesť k správne výsledku. Vždy, ak takýto algoritmus používate, tak treba dokázať jeho optimálnosť. To však nie je náplň tohto predmetu.

- **Nesprávne riešenie 3** je tiež nesprávny pažravý algoritmus. To, že vyberáme čísla, ktoré nám toho najmenej vylúčia, nám nič nezaručuje.

Nesprávnosť pažravých algoritmov si môžeme ukázať ešte na nasledovnom príklade. Máme mince s hodnotami 1, 7 a 10 (každú dostatočne veľa krát). Koľko najmenej mincí potrebujeme na zaplatenie sumy 14? Keď chceme použiť čo najmenší počet mincí, tak chceme používať, čo najväčšie hodnoty. Preto začneme minou 10. Oстане nám suma 4, ktorú zaplatíme 4 jednotkami. Teda najmenej treba 5 mincí. Iste vidíte, že to nie je pravda, lebo dve 7-ky nám stačia. Tu sa nám oplatilo začať „menej optimálnou“ mincou 7, ktorá nám potom umožnila spraviť „výrazne viac optimálnu“ voľbu neskôr.

Čiže vo všetkých riešeniach bola v zásade spoločná chyba – príkladom sa snažili dokázať všeobecné tvrdenie (hoci ten príklad znel niekedy pomerne sofistikovane). Na riešenie takýchto úloh treba používať všeobecné úvahy. Je náročné zistiť, či všeobecná úvaha je správna. Preto sa učíme o Dirichletovom princípe – je to všeobecná úvaha a viete, že je správna. Ak sa ho naučíte používať, tak viete získať lepšiu istotu, že budete riešiť správne úlohy, ktoré vám zadáme.

Pôsobí to síce dojemom, že vyžadujeme, aby ste riešili úlohy iba Dirichletovým princípom a iné riešenia neuznávame. Najmä keď veľa písomkových úloh naozaj dopadne tak, že (správne) riešenia Dirichletovým princípom majú plný počet a riešenia inými spôsobmi len epsilon bodov. Nie to však tak, že riešenia neuznávame preto, lebo sú riešené inak, ale preto, lebo sú riešené nesprávne.

Úloha 18: jazdci na šachovnici

Aj pri tejto úlohe sa môžu objaviť „argumetny“, že už nemôžeme žiadneho jazdca pridať. Protipríkladom k tejto úvahe je rozmiestnenie, kde máme po 8 jazdcov v 1., 4. a 7. rade. Tiež sa žiadni dvaja z nich neohrozujú, ale po pridaní ďalšieho sa 25. jazdec už ohrozovať bude. Keďže však ide o najčastejšiu chybu, tak sme ju zopakovali aj v tomto kontexte. Pozrieme sa však ešte na jedno iné riešenie.

Nesprávne riešenie

Jazdec na bielom políčku šachovnice ohrozuje iba čierne políčka a jazdec na čiernom políčku ohrozuje iba biele políčka. Preto keď umiestnime 32 jazdcov na biele políčka, tak sa nebudú ohrozovať. Ak by sme umiestňovali 33 jazdcov, tak z Dirichletovho princípu by musel byť jeden jazdec na čiernom políčku a ten by bol ohrozovaný nejakým jazdcom na bielom políčku. Preto najviac môžeme umiestniť 32 jazdcov.

Skúsme si toto riešenie rozobrať vetu po vete, resp. úvahu po úvahe. Vlastne teda zájdeme aj do samotnej štruktúry dôkazu ako postupnosti tvrdení.

1. Jazdec na bielom políčku šachovnice ohrozuje iba čierne políčka a jazdec na čiernom políčku ohrozuje iba biele políčka.
 - Toto je pravdivé tvrdenie, známa vlastnosť figúrky jazdca. Platnosť však vieme overiť jednoduchým rozborom ťahov jazdca.
2. Preto keď umiestnime 32 jazdcov na biele políčka, tak sa nebudú ohrozovať.
 - Tvrdíme, že to vyplýva z 1. vety a je to pravda.
 - Tu sme dokázali, že výsledok úlohy je 32 alebo viac.

3. Ak by sme umiestňovali 33 jazdcov,...

- Tuto predpokladáme, že máme na šachovnici umiestnených 33 jazdcov. Zrejme ide o ľubovoľnú (všeobecnú) konfiguráciu (takto sa aj začína dôkaz všeobecného tvrdenia). Napokon, naším cieľom je ukázať, že v **každej** konfigurácii 33 (a viac) jazdcov sa nejakí dvaja ohrozujú, tak to musí byť myslené všeobecne.

4. ... tak z Dirichletovho princípu by musel byť jeden jazdec na čiernom políčku

- Tu máme prvú chybu, lebo Dirichletov princíp toto netvrdí. Ten hovorí, že existujú dva jazdci / holuby / prvky ...
- Je však záver správny? Máme 33 jazdcov 32 bielych políčok a 32 čiernych. Vyplýva z toho, že nejaký jazdec je na čiernom políčku?
- Áno, vyplýva. Je to v zásade podobné tvrdenia ako Dirichletov princíp a počte prvkov v množinách a ľahko ho možno dokázať napr. sporom.
- Lepšia formulácia by teda bola napr.: „... tak musí existovať nejaký jazdec C na čiernom políčku...“ Taktiež sme si tohto jazdca pomenovali, čo je dobrý zvyk pre lepšie vyjadrovanie.

5. ... a ten by bol ohrozovaný nejakým jazdcom na bielom políčku.

- Najskôr sa pozrime na „nejakým jazdcom na bielom políčku“. Toto je tiež neporiadne napísané, lebo musí taký jazdec existovať? Nikde sme to neukázali. Ale je to len zopakovaná predošlá úvaha (ktorú autor riešenia nesprávne označil Dirichletovým princípom).
- Lepšie by bolo napísať „... a takisto musí existovať nejaký jazdec B na bielom políčku...“
- Ďalej riešenie vraví, že „ten čierny jazdec je ohrozený bielym jazdcom“. No čo táto formulácia vraví? Je to to isté ako „jazdec C je ohrozený jazdcom B “? Na základe čoho by to ale malo platiť? Jazdec na bielom políčku predsa nemusí ohrozovať jazdca na čiernom políčku.
- Toto je práve kritická chyba tohto riešenia (predošlé boli len drobné formálne nedostatky). Toto nie je správna všeobecná úvaha, a teda opäť ani toto riešenie nedokázalo, že sa dvaja jazdci ohrozujú.

Ďalšie riešenia na posúdenie

Zamyslite sa ešte nad takýmto riešením.

Pokus o riešenie úlohy 18 s jazdcami na šachovnici

Vyskúšaním všetkých možností zistíme, že na šachovnicu rozmerov 2×4 vieme umiestniť najviac 4 jazdcov. Celú šachovnicu 8×8 vieme rozdeliť na 8 oblastí 2×4 . Už vieme, že v každej z nich môže byť najviac 8 políčok. Preto na celej šachovnici môže byť najviac $8 \cdot 4 = 32$ koňov. Preto najviac môžeme umiestniť 32 koňov.

Toto riešenie je takmer správne. Síce sa v ňom nepíše o Dirichletovom princípe, jeho myšlienka je tam využitá, len to je inak podané. Prebratie možností pre šachovnicu 2×4 nie je zrovna ideálne, ale dá sa uznať ako pomerne malé množstvo námahy. Bolo by vhodné k tomu doložiť aj nejaký dôkaz, že sme to naozaj vyskúšali (napr. niekoľko obrázkov). Hlavný problém je však inde.

Pamätajte však na to, že riešenia takýchto úloh sa musia skladať z dvoch častí. Pokiaľ tieto dve časti nie sú viditeľne oddelené, tak je to signál, že autor riešenia asi na niečo zabudol. V tomto prípade ide

o konštrukciu umiestnenia 32 jazdcov, ktorí sa neohrozujú. V riešení je len dokázané, že ich nemôže byť viac ako 32, no nie je ukázané, že tých 32 sa dá dosiahnuť.

Naozaj to z týchto úvah nevyplýva, hoci v prípade 2×4 je zahrnutá aj konštrukcia správneho rozmiestnenia 4 jazdcov. No problém je, že do 2×4 môžeme jazdcov umiestniť aj do 1. a 4. stĺpca. Ak takto vyplníme všetky obdĺžniky 2×4 , tak v rámci nich sa jazdci ohrozovať nebudú, ale mimo nich hej. A napokon, skúste si spraviť úvahu s vežami – v každom obdĺžniku 2×4 môžu byť najviac 2 veže, teda spolu máme počet veží menší alebo rovný $8 \cdot 2 = 16$ veží. To je pravda, ale nie je to najväčšia hodnota.

Ako riešiť a ako písať riešenie

Už sme dosť písali o tom, ako **neriešiť** úlohy tohto typu, tak teraz sa pozrieme na to, ako ich riešiť. Najviac priamočiare použitie množinovej verzii Dirichletovho princípu (veta 1) vyzerá zhruba takto:

1. Prečítame si zadanie a zistíme, koľko prvkov máme nájsť a s akou vlastnosťou. Prvky budú naše holuby.
2. Odhadneme, koľko holubníkov (množín $M_1, M_2, \dots, M_n$) chceme mať.
3. Pokiaľ v zadaní vyberáme niekoľko prvkov z nejakej množiny A (čísla, políčka zo šachovnice), rozdelíme množinu A na m podmnožín $A_1, A_2, \dots, A_m$ – holubníkov. Pre každú z týchto množín musí platiť, že ľubovoľné dva prvky z nej musia mať hľadanú vlastnosť. Rozdelenie hľadáme skúšaním, kreslením, ako by to mohlo vyzerieť, čo by množiny mohli obsahovať.
4. Ak zo všetkých prvkov množiny A vyberieme n -prvkovú podmnožinu N – teda n holubov, tak položíme $M_i = N \cap A_i$ pre $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a na množiny $N, M_1, M_2, \dots, M_m$ použijeme vetu 1.
5. Spíšeme riešenie.

Samozrejme, sú úlohy, napr. úloha 7, v ktorých treba použiť Dirichletov princíp viac sofistikovane a na prvý pohľad nie je jasné, čo budú holuby a čo holubníky.

Ilustrujeme si toto na úlohe 22, presnejšie na dôkaze toho, že ľubovoľný výber 11 čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 20\}$ obsahuje dve čísla, z ktorých jedno delí druhé.

1. Chceme nájsť 2 čísla také, že jedno delí druhé. Keďže chceme len 2 čísla, tak použijeme základný Dirichletov princíp. Holuby bude našich 11 vybraných čísel.
2. Holubníkov musí byť menej, teda 10, príp. menej.
3. Čísla vyberáme z množiny $\{1, 2, \dots, 20\}$, takže holubníky vytvoríme najlepšie tak, že túto množinu rozložíme na 10 (príp. menej podmnožín). Rozkladať budeme tak, aby každá podmnožina obsahovala len také čísla, že v každej dvojici jej čísel bude jedno deliť druhé. To sa dá robiť pekne postupne:
 - Začneme napr. s holubníkom $\{2, 4\}$. Môžeme doňho pridať 6? Síce $2 \mid 6$, ale $4 \nmid 6$, takže $\{2, 4, 6\}$ nie je správny holubník. Ale napr. 8 pridať môžeme, lebo $2 \mid 8$ aj $4 \mid 8$.
 - Takto vieme skončiť s holubníkom $\{2, 4, 8, 16\}$, príp. ešte číslo 1 môžeme pridať.
 - Skúšame tvoriť ďalšie, napr. $\{3, 9, 18\}$, $\{1, 3, 6, 12\}$.
 - Možností je veľa, tak treba skúšať, preskupovať, dokým nám neostane menej ako 11 holubníkov.

Potom riešenie spíšeme. Vtedy nám stačí už uviesť rozdelenie na holubníky. Proces ich tvorby nie je potrebný.

Riešenie

Rozložme si množinu $A = \{1, 2, \dots, 20\}$ nasledovne:

$$A_1 = \{1, 2, 4, 8, 16\},$$

$$A_5 = \{9, 18\},$$

$$A_9 = \{17\},$$

$$A_2 = \{3, 6, 12\},$$

$$A_6 = \{11\},$$

$$A_{10} = \{19\}.$$

$$A_3 = \{5, 10, 20\},$$

$$A_7 = \{13\},$$

$$A_4 = \{7, 14\},$$

$$A_8 = \{15\},$$

Vidíme, že ak z ľubovoľnej množiny A_i vyberieme dva prvky, tak jeden bude deliť druhý. Keďže z množiny A vyberáme 11 čísel, ale máme iba 10 množín, tak z Dirichletovho princípu musíme vybrať dve čísla a, b z tej istej množiny A_i . Vďaka našej voľbe množín A_i pre tieto dve čísla a, b platí, že jedno delí druhé. Tým sme dokázali, čo sme mali.

Pri riešení sme mohli povedať „Vidíme“, lebo množín a ich prvkov je málo a ide o konkrétne množiny. Túto vlastnosť teda vieme skontrolovať pohľadom. Pri väčších (teda aj nekonečných) množinách by sme mali takúto vlastnosť dokázať.

Formálny záver cez zobrazenia Nech f je zobrazenie, ktoré každému číslu x z 11 vybraných čísel priradí také $i \in \{1, \dots, 10\}$, že $x \in M_i$ (keďže $\{M_1, M_2, \dots, M_{10}\}$ je rozklad M , tak ide o korektne definované zobrazenie). Keďže $11 > 10$, tak z Dirichletovho princípu máme, že zobrazenie f nemôže byť injektívne. Preto existujú dve vybrané čísla, ktoré patria do tej istej množiny M_i . Vďaka našej voľbe množín M_i musí jedno z nich deliť druhé.

Formálny záver cez množiny Nech N je 11-prvková podmnožina množiny $\{1, 2, \dots, 20\}$. Definujme 10 množín $M_i = N \cap A_i$ pre $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$, ktorých zjednotenie je zjavne N . Keďže $|N| = 11 > 10$, tak z Dirichletovho princípu vyplýva, že niektorá z množín M_i obsahuje aspoň dva prvky. Vďaka voľbe množín M_i jeden z nich delí druhý.

Čo s optimalizačnými úlohami? Lenže v úlohe 22 sme nevedeli, že výsledok je 11. Ako naň prísť? Jednoducho skúšaním. Vieme skúšať vybrať čo najviac čísel tak, aby v nich žiadne nedelilo iné. Keď nadobudneme pocit, že viac ako 10 vybrať nepôjde, tak môžeme začať dokazovať, že pri výbere 11 tam už dve také sú. Ale rovnako dobre vieme začať aj s tvorbou holubníkov. Vlastne tak na úlohu „útočíme“ z oboch strán. Počas riešenia tak môžeme byť v nasledovnom stave:

- Ak vyberieme prvočísla $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, to je 8 čísel, teda žiadne nedelí iné.
- Máme nájsené 13 holubníkov: $\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 8\}, \{5, 15\}, \{6, 12\}, \{7, 14\}, \{8, 16\}, \{9, 18\}, \{10, 20\}, \{11\}, \{13\}, \{17\}, \{19\}$.

Čo vieme teraz povedať o výsledku tejto úlohy? Že je niekde medzi 9 a 14, lebo 8 čísel nám nestačí vybrať, takže výsledok musí byť aspoň 9. A ak už máme 14 vybraných čísel, tak vieme použiť Dirichletov princíp, keďže máme 13 holubníkov. Aby sme tento interval zmenšili, tak potrebujeme nájsť lepší výber čísel (čím zvýšime dolnú hranicu) alebo lepšie rozdelenie holubníkov (čím znížime hornú hranicu). (Vo všeobecnosti môžeme hornú hranicu znižovať aj úplne inými úvahami.)

Správne riešenie potom vie vyzeráť nasledovne.

Riešenie úlohy 22

Ukážeme, že menej ako 11 čísel nám vybrať nestačí – vtedy totiž vyberieme čísla 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 (alebo ich podmnožinu). Vidíme, že žiadne dve z týchto čísel sa nedelia. Ukážeme, že ak vyberieme aspoň 11, tak sú medzi nimi dve, z ktorých jedno delí druhé. Rozložme si množinu $M = \{1, 2, \dots, 20\}$ nasledovne (na 10 holubníkov):

$$M_1 = \{1, 2, 4, 8, 16\},$$

$$M_5 = \{9, 18\},$$

$$M_9 = \{17\},$$

$$M_2 = \{3, 6, 12\},$$

$$M_6 = \{11\},$$

$$M_{10} = \{19\}.$$

$$M_3 = \{5, 10, 20\},$$

$$M_7 = \{13\},$$

$$M_4 = \{7, 14\},$$

$$M_8 = \{15\},$$

Vidíme, že ak z ľubovoľnej množiny M_i vyberieme dva prvky, tak jeden bude deliť druhý. Keďže z množiny M vyberáme aspoň 11 čísel, ale máme iba 10 množín (čo je menej), tak z Dirichletovho princípu musíme vybrať dve čísla a, b z tej istej množiny M_i . Vďaka našej voľbe množín M_i pre tieto dve čísla a, b platí, že jedno delí druhé. Tým sme dokázali, čo sme mali.

Výsledky / nápovedy

V minimalizačných (maximalizačných) úlohách používame skratku K na konštrukciu optimálneho rozmiestnenia a skratku O na odhad, že menej (viac) ako spománané minimum (maximum) nemožno dosiahnuť.

1. Každému číslu priradíme zvyšok po delení štyrmi. Koľko je vybraných čísel a koľko je možných zvyškov?
2. Každému číslu priradíme jeho posledné dvojčíslenie.
3. Každému číslu priradíme jeho zvyšok po dedení n .
5. Rozdeľte si čísla podľa zvyškov: $\{0\}, \{1, 99\}, \dots, \{49, 51\}, \{50\}$
6. Ak majú čísla navzájom rôzne zvyšky, je to predchádzajúca úloha. Čo ak niektoré dve čísla majú rovnaký zvyšok?
7. Uvažujte súčty $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ pre $0 \leq i \leq n$ ($s_0 = 0$). Platí $a_i + \dots + a_j = s_j - s_{i-1}$. Stačí teda nájsť vhodné s_i, s_j , aké presne?
8. Rozdeľte si čísla $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n - 1, 2n\}$
9. Priradiť vektoru jeho posledné 4 bity.
10. Rozdeľte si trojuholník strednými priečkami na štyri menšie trojuholníky.
11. Spočítajte, koľko rôznych škôd môže bača utrpieť v daný deň.
12. Nájdite najprv súvislý úsek dní, počas ktorého vlk zje počet oviec deliteľný 15-timi. Nie je na to 9 týždňov veľa? Môže to byť iný násobok 15-tich ako práve 15?
14. 12
15. $5k + 2$
16. 8, K: diagonála, O: rozdeľte si si šachovnicu na stĺpce.
17. 14, K: prvý a posledný riadok bez dvoch rohov, O: rozdeľte si šachovnicu na 14 oblastí po uhlopriečkach (s malou obmenou)
18. 32, K: čierne políčka, O: rozdeľte si šachovnicu na dvojice políčok, z ktorých sa kone navzájom ohrozujú
19. 32
20. 15, O: rozdeľte si šachovnicu na uhlopriečky rovnobežné s a1-h8.
21. 2, na každej farbe vie byť len jeden
22. 11. Každému číslu priradiť jeho najväčšieho nepárneho deliteľa.
23. $n + 1$.
24. $19/6 > 3$, preto jedno číslo musí padnúť aspoň 4-krát
25. 34
26. $15k + 4$

27. Rozdeľte si šachovnicu na 8 „uhlopriečok“ po 8 políčok – ak uhlopriečka narazí na stranu štvorca, tak pokračuje z druhej strany.

29. Rozdeľte si šachovnicu po stĺpcoch.

Riešenia vybraných úloh

Riešenie úlohy 32

Ukážeme, že najväčšie také k je 10.

Dolný odhad (konštrukcia). Ukážeme, že existuje výber 10 podmnožín, ktorý nie je podozrivý. Ide napr. o výber všetkých 2-prvkových podmnožín, ktorých je $\binom{5}{2} = 10$. Overenie, že tento výber nie je podozrivý ľahko spravíme aj manuálne. Avšak vyplýva to z toho, že ak máme dve rôzne množiny A, B , pre ktoré platí $A \subseteq B$, tak B musí mať ostro viac prvkov ako A . To pri iba dvojprvkových množinách nemôže nastať.

Horný odhad. Teraz ukážeme, že každý výber 11 podmnožín je podozrivý. Teda že pre každý výber 11 podmnožín množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ existujú dve rôzne podmnožiny, z ktorých je jedna podmnožinou druhej. Uvažujme nasledovné rozdelenie všetkých podmnožín na 10 skupín:

1. $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
2. $\{2\}, \{2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}$
3. $\{3\}, \{3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}$;
4. $\{4\}, \{4, 5\}, \{4, 5, 1\}, \{4, 5, 1, 2\}$;
5. $\{5\}, \{5, 1\}, \{5, 1, 2\}, \{5, 1, 2, 3\}$;
6. $\{1, 3\}, \{1, 3, 4\}$;
7. $\{2, 4\}, \{2, 4, 5\}$;
8. $\{3, 5\}, \{1, 3, 5\}$;
9. $\{4, 1\}, \{1, 2, 4\}$;
10. $\{5, 2\}, \{2, 3, 5\}$.

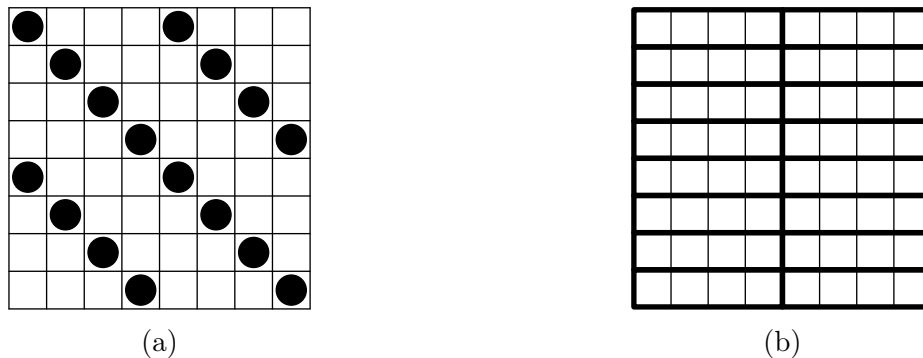
Ľahko overíme pre každú zo skupín platí, že ak vyberieme hocijaké dve množiny z nej, tak jedna je podmnožinou druhej. Keďže máme 11 vybraných podmnožín, ale len 10 skupín, tak podľa Dirichletovho princípu sme z niektorej skupiny vybrali dve množiny – na základe predošlej vety jedna je podmnožinou druhej.

Poznámka. Keď si povieme, že chceme druhú časť dokázať Dirichlerovým princípom, tak to znamená, že chceme všetkých 32 podmnožín rozdeliť do skupín (holubníkov). Nakoľko chceme, aby nám Dirichletov princíp povedal, že existujú dve množiny, z ktorých jedna je podmnožinou druhej, tak tieto skupiny musíme tvoriť podľa tejto vlastnosti – hocijaké dve podmnožiny vyberieme, tak jedna musí byť podmnožinou druhej. Vyhovujúce rozdelenie tak vieme nájsť skúšaním, kedy postupne pridávame množiny do skupín sledujúc túto vlastnosť.

Riešenie úlohy 33

a) Ukážeme, že na šachovnicu 8×8 možno umiestniť najviac 16 miniveží. Obrázok 2a ukazuje, že naozaj možno rozmiestniť 16 miniveží tak, aby sa žiadne dve neohrozovali.

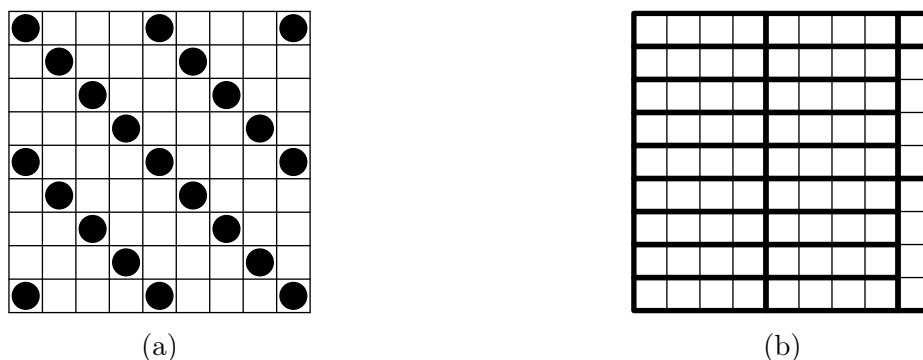
Teraz ukážeme, že viac ako 16 miniveží nemôžeme umiestniť. Predpokladajme, že máme na šachovnici rozmiestnených aspoň 17 miniveží. Rozdeľme si políčka šachovnice do 16 množín ako na obrázku 2b. Pre každú množinu platí, že ak do nej umiestnime dve veže, tak sa budú navzájom ohrozovať. Keďže veží máme viac ako množín, z Dirichletovho princípu musí existovať množina políček, v ktorej sú umiestnené dve veže. Tieto dve veže sa ohrozujú, preto nie je možné umiestniť viac ako 16 miniveží.



Obr. 2

b) Ukážeme, že na šachovnicu 9×9 možno umiestniť najviac 21 miniveží. Obrázok 3a ukazuje, že naozaj možno rozmiestniť 21 miniveží tak, aby sa žiadne dve neohrozovali.

Teraz ukážeme, že viac ako 21 miniveží nemôžeme umiestniť. Predpokladajme, že máme na šachovnici rozmiestnených aspoň 22 miniveží. Rozdeľme si políčka šachovnice do 21 množín ako na obrázku 3b. Pre každú množinu platí, že ak do nej umiestnime dve veže, tak sa budú navzájom ohrozovať. Keďže veží máme viac ako množín, z Dirichletovho princípu musí existovať množina políček, v ktorej sú umiestnené dve veže. Tieto dve veže sa ohrozujú, preto nie je možné umiestniť viac ako 21 miniveží.



Obr. 3

Riešenie úlohy 34

Ukážeme, že riešením je 9.

Dolný odhad. Ak vyberieme 8 čísel 1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22, tak ľahko skontrolujeme (prevereníím všetkých možností), že medzi nimi nie sú dve s rozdielom 3, 4 ani 7. Teda vyberať 8 čísel nám nestačí.

Horný odhad. Teraz ukážeme, že ak vyberieme ľubovoľných 9 čísel z množiny $M = \{1, 2, \dots, 22\}$, tak budú existovať 2 vybrané čísla z rozdielom 3, 4 alebo 7. Rozložme si množinu M na nasledovných 8 tried:

$$\{1, 4, 8\}, \quad \{2, 5, 9\}, \quad \{3, 6, 10\}, \quad \{7, 11\}, \quad \{12, 15, 19\}, \quad \{13, 16, 20\}, \quad \{14, 17, 21\}, \quad \{18, 22\}.$$

Ľahko skontrolujeme, že v každej triede majú každé dve čísla rozdiel 3, 4 alebo 7. Z Dirichletovho princípu vyplýva, že ak vyberieme ľubovoľných 9 čísel, čo viac ako počet tried, tak existujú dve vybrané čísla z rovnakej triedy a tie teda majú rozdiel 3, 4 alebo 7.

Bonus

Pre $n \leq 3$ hľadaný najmenší počet čísel neexistuje, lebo v samotnej množine $M_n := \{1, 2, \dots, n\}$ neexistujú dve čísla s rozdielom 3, 4 alebo 7. Ukážeme, že riešením pre $n \geq 4$ je

$$3\lfloor n/10 \rfloor + \min(n \bmod 10, 3) + 1.$$

Túto hodnotu získame zovšeobecnením konštrukcie nevyhovujúceho výberu 8 čísel pre $n = 22$. Priamo teda tak vieme získať dolný odhad.

Dolný odhad. Uvažujme množinu A , ktorá obsahuje všetky prirodzené čísla končiace sa na 1, 2 alebo 3, teda

$$A = \{10k + z; k \in \mathbb{N} \wedge z \in \{1, 2, 3\}\}.$$

Ukážeme, že množina A neobsahuje žiadne dve čísla s rozdielom 3, 4 alebo 7. Vezmime si dve čísla $10k_1 + z_1 < 10k_2 + z_2 \in A$ pre $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ a $z_1, z_2 \in \{1, 2, 3\}$. Ak sú v rovnakej desiatke, teda ak $k_1 = k_2$, tak ich rozdiel je najviac $z_2 - z_1 = 2$. Ak sú v iných desiatkach, tak ich rozdiel je $10k_2 + z_2 - 10k_1 - z_1 = 10(k_2 - k_1) + z_2 - z_1 \geq 10 + 1 - 3 = 8$. V oboch prípadoch ich rozdiel nie je 3, 4 ani 7. Potom zjavne pre každé $n \geq 4$ množina $A \cap M_n$ obsahuje $3\lfloor n/10 \rfloor + \min(n \bmod 10, 3)$ čísel a žiadnu dvojicu so želaným rozdielom. Musíme teda z M_n vybrať viac čísel.

Horný odhad. Pre horný odhad sa nám nepodarí zovšeobecniť naše riešenie pre $n = 22$. Použijeme však iný prístup. Miesto delenia na triedy, kde chceme mať aspoň 2 čísla, budeme hľadať triedy, kde chceme mať aspoň 4 čísla. Na to sa nám prirodzene ponúkne 10 za sebou idúcich čísel. Oproti dôkazu v riadnej časti ho sformulujeme v pozitívnom svetle, kde ukážeme, že ak vyberieme čísla bez rozdielu 3, 4 alebo 7, tak sme ich vybrali najviac $3\lfloor n/10 \rfloor + \min(n \bmod 10, 3)$.

Ukážeme, z ľubovoľnej množiny $\{a + 1, a + 2, \dots, a + 10\}$, kde $a \in \mathbb{N}$, môžeme vybrať najviac tri čísla tak, aby sme nemali dvojicu s rozdielom 3, 4 alebo 7. Toto tvrdenie sa dá ľahko ukázať prevereníím všetkých možností. Jeden zo stručných dôkazov je sporom, kde uvažujeme nasledovné dve rozklady:

$$\{a + 1, a + 4, a + 8\}, \quad \{a + 2, a + 5, a + 9\}, \quad \{a + 3, a + 6, a + 10\}, \quad \{a + 7\},$$

$$\{a + 1, a + 5, a + 8\}, \quad \{a + 2, a + 6, a + 9\}, \quad \{a + 3, a + 7, a + 10\}, \quad \{a + 4\}.$$

Opäť každá trieda obsahuje len dvojice so sporými rozdielmi 3, 4 alebo 7. Ak vyberieme dve čísla z rovnakej triedy, tak máme sporný rozdiel. Ak by teda existoval výber štyroch čísel bez sporného rozdielu, tak keďže oba rozklady majú 4 triedy, musíme z každej triedy vybrať jedno číslo. Špeciálne, musíme vybrať číslo $a + 7$ aj číslo $a + 4$, no ich rozdiel je $a + 7 - a - 4 = 3$, čo je spor. Zjavne najviac 3 čísla vieme vybrať aj z množiny menej ako 10 za sebou idúcich čísel.

Množinu M_n si teda rozdelíme na $\lfloor n/10 \rfloor + 1$ tried, kde trieda T_i obsahuje tie čísla z množiny M_n , ktorých celočíselný podiel po delení 10 je $i \in \{0, 1, \dots, \lfloor n/10 \rfloor\}$. Predpokladajme, že vyberieme

čísla z množiny M_n tak, že medzi žiadanými dvomi nie je rozdiel 3, 4 ani 7. Keďže množina T_i pre $0 \leq i < \lfloor n/10 \rfloor$ obsahuje práve 10 za sebou idúcich čísel, tak sme z nej mohli vybrať najviac 3 čísla. Takisto môžeme najviac 3 čísla vybrať z množiny $T_{\lfloor n/10 \rfloor}$, keďže obsahuje $n \bmod 10$ čísel. Ale taktiež platí, že z nej môžeme vybrať najviac $n \bmod 10$ čísel, čo spolu s predošlou vetou dáva najviac $\min(n \bmod 10, 3)$ čísel. Celkovo tak vieme vybrať najviac $3\lfloor n/10 \rfloor + \min(n \bmod 10, 3)$ čísel. Teda ak vyberieme $3\lfloor n/10 \rfloor + \min(n \bmod 10, 3) + 1$ čísel, tak máme zaručenú existenciu rozdielu 3, 4 alebo 7.

Riešenie úlohy 35

Časti písané kurzívou nie je potrebné uvádzať v riešení. Iba znaznačujú, ako sadá na riešenie prísť.

Pre prehľadnosť označme $M = \{1, 2, \dots, 100\}$. Riešenie úlohy označme x . Hodnotu x môžeme odhadovať zhola aj zhora. Tieto dve časti môžeme robiť v ľubovoľnom poradí. Dokonca môžeme medzi nimi prebiehať.

Horný odhad *Pozrieme sa na to, koľko čísel nám bude stačiť. Keďže tu máme ukazovať, že pre výbere x čísel **existujú dve** čísla, ktorých rozdiel je zložené číslo, tak použijeme Dirichletov princíp. Na to si potrebujeme množinu všetkých čísel M rozdeliť na čo najmenej podmnožín (holubníkov) s vlastnosťou, že ľubovoľné dve čísla z podmnožiny (holubníka) majú rozdiel zložené číslo.*

Skúsme tvoriť holubníky postupne. S ktorým číslom bude číslo 1? Nemôže byť s 2, s 3 ani so 4. Dajme k jednotke teda číslo 5. Ktoré číslo tam môžeme dať ďalej? Najbližšie je 9, lebo rozdiely $9 - 5 = 4$ aj $9 - 1 = 8$ sú zložené. Ďalej vieme pridať aj číslo 13, lebo $13 - 9 = 4$, $13 - 5 = 8$ aj $13 - 1 = 12$ sú zložené. Takto sa dostaneme k číslam $\{1, 5, 9, 13, \dots, 97\}$, ktoré tvoria vyhovujúci holubník. Podobne nájdeme aj ďalšie holubníky $\{2, 6, \dots, 98\}$, $\{3, 7, \dots, 99\}$ a $\{4, 8, \dots, 100\}$ – teda vlastne sme rozdelili čísla z M do 4 holubníkov na základe ich zvyšku po delení štyrmi.

Ak teda z M vyberieme 5 čísel, tak podľa Dirichletovho prinípu existujú aspoň dve čísla z jedného holubníka. Tieto dve čísla majú rovnaký zvyšok po delení 4, preto ich rozdiel je deliteľný 4. To znamená, že ich rozdiel je zložené číslo. Vybrať 5 čísel nám teda stačí. Máme tak $x \geq 5$. Táto časť riešenia však sama o sebe nevylučuje, žeby sme dve čísla so zloženým rozdielom nenašli aj pri menej ako 5 vybraných číslach.

Dolný odhad *Ako ukážeme, že vybrať y čísel z množiny M nám nezaručuje existenciu dvoch s rozdielom rovným zloženému číslu? Nájdeme konkrétny výber y čísel z M , kde taký zložený rozdiel nie je. Chceme teda nájsť čo najviac čísel z množiny M tak, aby sme medzi nimi nemali dvojicu, ktorej rozdiel bude zložené číslo. Aj keď takúto skupinu čísel začneme hľadať postupne, tak nájdeme čísla 1, 2, 3, 4. Najväčší rozdiel, čo vieme z nich dostať je $4 - 1 = 3$, no najmenšie zložené číslo je až 4. Preto medzi číslami 1, 2, 3, 4 nie sú dve so zloženým rozdielom. Teda pre splnenie úlohy potrebujeme vybrať z M aspoň 5 čísel.*

Toto nám vraví, že $x \geq 5$. Opäť, táto časť sama o sebe nezaručuje, že ak máme 5 čísel, tak isto dvojicu so zloženým rozdielom nájdeme.

Riešenie Ukážeme, že hľadaný najmenší počet čísel, ktoré treba vybrať z M , je 5.

Ak vyberieme 4 alebo menej čísel z množiny M , tak môžeme vybrať čísla 1, 2, 3, 4 (resp. ich podmnožinu). Vidíme, že žiadne dve z nich nemajú rozdiel zložené číslo. Preto musíme z M vybrať aspoň 5 čísel.

Nech teda máme z M vybraných 5 čísel. Rozdeľme si množinu M na 4 podmnožiny

$$\{4k + 1; k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 24\}, \{4k + 2; k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 24\}, \{4k + 3; k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 24\}, \{4k + 4; k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 24\}$$

Keďže $5 > 4$, tak z Dirichletovho princípu aspoň dve z vybraných čísel, označme ich a, b , sa nachádzajú v rovnakej množine. Keďže čísla z rovnakej množiny majú rovnaké zvyšky po delení štyrmi, tak $4 \mid a - b$. To znamená, že $a - b$ je zložené číslo, čím sme ukázali, že vždy vieme nájsť dve čísla s rozdielom rovným zloženému číslu.

Iné riešenie Tretí odsek predošlého riešenia možno zapísať aj nasledovne

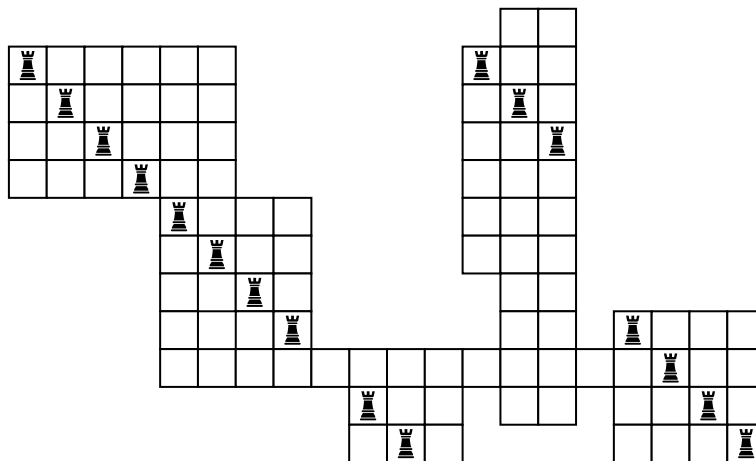
Nech teda máme z M vybraných 5 čísel. Keďže máme len 4 zvyšky po delení štyrmi a $5 > 4$, z Dirichletovho princípu existujú dve vybrané čísla a, b s rovnakým zvyškom po delení štyrmi. Preto $4 \mid a - b$ a teda rozdiel $a - b$ je zložené číslo. Tým sme ukázali, že vždy vieme nájsť dve čísla s rozdielom rovným zloženému číslu.

Ak by sme chceli použitie Dirichletovho princípu sformulovať cez zobrazenia, tak v tomto riešení v podstate uvažujeme zobrazenie z 5-prvkovej množiny vybraných čísel, ktoré im priraduje ich zvyšky po delení štyrmi, ktoré majú 4 možné hodnoty.

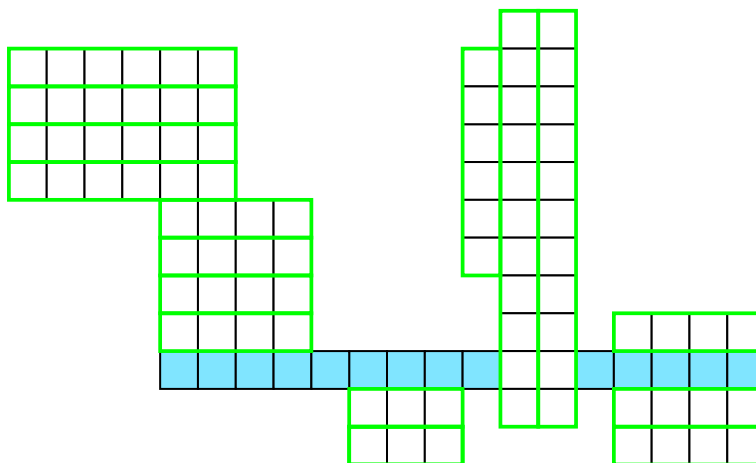
Riešenie úlohy 36

Ukážeme, že najviac možno umiestniť 17 veží.

Konštrukcia Na obrázku je umiestnených na pláne 17 veží, o ktorých ľahko skontrolujeme, že žiadne dve z nich sa neohrozujú.



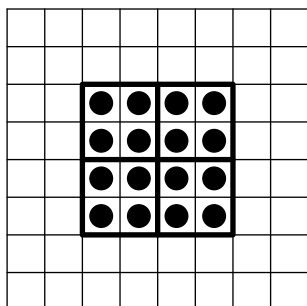
Odhad MatFyz si rozdelíme na 17 oblastí ako na obrázku – 16 z nich tvorí zelený obdĺžnik a jedna je tvorená modrými políčkami. O každej z oblastí platí, že ak do nej ľubovoľne umiestnime dve veže, tak sa budú ohrozovať – oblasti sú totiž tvorená riadkami alebo stĺpcami, resp. ich časťami. Ak umiestnime aspoň 18 veží, tak z Dirichletovho princípu existuje oblasť, ktorá obsahuje aspoň dve veže – a tie sa ohrozujú. Preto nemôžeme mať viac ako 17 veží.



Riešenie úlohy 37

Ukážeme, že najmenšie hľadané n je 17.

Ak je $n = 16$, tak umiestnime 16 kráľov do štvorca 4×4 . Ten možno rozdeliť na štyri štvorce 2×2 (obrázok 4). Ak vyberieme zo 16 kráľov ľubovoľných päť, tak z Dirichletovho princípu budú v jednom štvorci 2×2 aspoň dvaja a tí sa zjavne ohrozujú. Preto zo 16 kráľov, a zjavne aj hocikakého menšieho počtu kráľov, nevieme vybrať päť neohrozujúcich sa.



Obr. 4

1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4

Obr. 5

Teraz uvažujme ľubovoľné rozmiestnenie 17 kráľov. Políčka šachovnice rozdelíme na 4 množiny podľa obrázku 5. Ľahko overíme, že králi na políčkach z rovnakej množiny sa navzájom neohrozujú. Keďže $17/4 > 4$, z frekvenčnej formy Dirichletovho princípu vyplýva, že v niektorej množine sa nachádzajú aspoň piati králi, a tí sa navzájom neohrozujú.

Formálne riešenie druhej časti *To isté riešenie možno prepísať o niečo viac formálne nasledovných spôsobom.* Nech A je ľubovoľná množina 17 políčk, na ktorých stoja králi. Pod políčkou myslíme usporiadanú dvojicu $(r, s) \in \{0, 1, \dots, 7\} \times \{0, 1, \dots, 7\}$, kde r označuje riadok a s stĺpec (na obrázku 5 čísloujeme riadku zhora nadol a stĺpce zľava doprava). Uvažujem zobrazenie $f: A \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$, ktoré každému políčku priradí prvok z $\{1, 2, 3, 4\}$ ako je určené na obrázku 5. Keďže $17/4 > 4$, z frekvenčnej formy Dirichletovho princípu vyplýva, že existuje číslo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, ktoré sa zobrazí aspoň 5 políčk množiny A . Ľahko overíme, že králi na políčkach z množiny $f^{-1}(\{i\})$ (teda tých, ktoré sa zobrazia na i) sa navzájom neohrozujú.

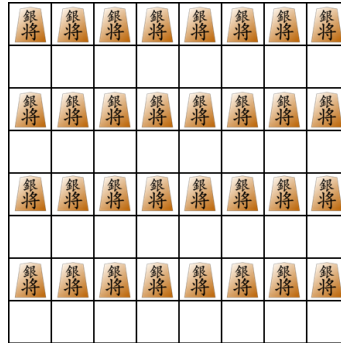
Poznámka. Zobrazenie f s predošlého odesku má predpis

$$f((r, s)) = r \bmod 2 + 2 \cdot (s \bmod 2) + 1.$$

Riešenie úlohy 38

Ukážeme, že na šachovnicu možno umiestniť najviac 32 strieborných generálov tak, aby žiaden nebol ohrozený iným.

Umiestnime po osem figúrok do každého nepárneho riadku, pričom všetky figúrky natočíme smerom k hornému okraju šachovnice (obrázok 6). Každý strieborný generál má ďalších generálov iba naľavo alebo napravo od neho a z týchto políček nemôže byť nimi ohrozený. Našli sme teda vyhovujúce rozmiestnenie 32 strieborných generálov.



Obr. 6

Predpokladajme, že na šachovnici sa nachádza viac ako 32 strieborných generálov. Rozdeľme si šachovnicu na 16 neprekrývajúcich sa štvorcov rozmerov 2×2 políčka a pre každý štvorec rozdeľme jeho 4 políčka do dvoch dvojíc, do každej dáme 2 políčka z protiľahlých rohov. Vytvorili sme si tak $2 \cdot 16 = 32$ dvojíc políček.

Uvažujme zobrazenie f , ktoré každej figúrke priradzuje dvojicu, v ktorej sa nachádza políčko, na ktorom daná figúrka stojí. Keďže máme 32 dvojíc políček a viac ako 32 figúrok, z Dirichletovho princípu vieme, že zobrazenie f nie je injektívne. Teda v aspoň jednej dvojici musia byť aspoň dve figúrky. Políčka, na ktorých sú tieto dve figúrky susedia rohom, preto sa strieborní generáli na nich navzájom ohrozujú, a to bez ohľadu na ich otočenie (keďže strieborný generál ohrozuje všetky 4 políčka susediace iba rohom). Tým sme ukázali, že ak máme viac ako 32 strieborných generálov, tak sa už nejakí dvaja ohrozujú (dokonca navzájom).

Riešenie bonusovej úlohy. Ak máme šachovnicu rozmerov $n \times n$, tak pre optimálne umiestnenie figúrok vieme zovšeobecniť rozmiestnenie pre 8×8 . Umiestnime po n strieborných generálov do každého nepárneho riadku. Takéto rozmiestnenie vyhovuje z rovnakého dôvodu, ako pri 8×8 . Dostaneme tak na šachovnici $\lceil n/2 \rceil n$ strieborných generálov.

Nech je n párne a nech je na šachovnici viac ako $n^2/2$ figúrok. V tomto prípade vieme celkom priamočiaro zovšeobecniť úvahy z prípadu 8×8 . Rozdeľme si políčka šachovnice na $n^2/4$ neprekrývajúcich sa štvorcov rozmeru 2×2 . Z Dirichletovho princípu potom vieme, že v nejakom štvorci 2×2 musia byť aspoň traja strieborní generáli. Z nich aspoň dvaja musia byť v protiľahlých rohoch, a teda tí dvaja sa ohrozujú.

Ak $n = 2k + 1$ je nepárne, tak chceme ukázať, že na šachovnici nemôže byť viac ako $n(n+1)/2 = (2k+1)(k+1)$ strieborných generálov, z ktorých žiaden neohrozuje iného. Toto tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa k .

Ak $k = 0$, tak máme šachovnicu 1×1 a na ňu viac ako $(2 \cdot 0 + 1)(0 + 1) = 1$ strieborného generála neumiestnime.

Predpokladajme, že pre nejaké celé $k \geq 0$ na šachovnicu rozmerov $(2k+1) \times (2k+1)$ vieme umiestniť bez ohrozenia najviac $(2k+1)(k+1)$ figúrok. Uvažujme šachovnicu rozmerov $(2k+3) \times (2k+3)$ a predpokladajme, že máme na nej umiestnených viac ako $(2k+3)(k+2)$ figúrok. Zoberme si štvorec $(2k+1) \times (2k+1)$ vpravo dole šachovnice na obrázku 7 vyznačený šedou). Ak by v ňom bolo viac ako $(2k+1)(k+1)$ figúrok, tak z indukčného predpokladu by sa nejaké dve ohrozovali. Preto v tomto štvorci môže byť najviac $(2k+1)(k+1)$ figúrok. Teda vo zvyšnom „elku“ (na obrázku 7 biela časť) šachovnice musí byť viac ako $(2k+3)(k+2) - (2k+1)(k+1) = 4k+5$ figúrok.

Políčka v ostávajúcej časti šachovnice si rozdelíme do skupín. Políčko, ktoré sa nachádza v r -tom riadku a s -tom stĺpci označíme (r, s) . Uvažujme množiny políčok:

- $\{(i, 1), (i+1, 2)\}$ pre každé $i \in \{1, 2, \dots, 2k+2\}$, teda spolu $2k+2$ množín políčok;
- $\{(1, i), (2, i+1)\}$ pre každé $i \in \{2, 3, \dots, 2k+2\}$, teda spolu $2k+1$ množín políčok;
- dve množiny $\{(2k+3, 1)\}$ a $\{(1, 2k+3)\}$ po jednom políčku.

(Pre $k=3$ si môžete skontrolovať rozdelenie políčok na obrázku 7.) Spolu sme políčka ostávajúceho úseku šachovnice rozdelili do $4k+5$ množín. My sme však ukázali, že v tejto časti musí byť viac ako $4k+5$ figúrok. Preto z Dirichlerovho princípu existujú dve figúrky v jednej množine, a tie sa musia ohrozovať. Tým je dôkaz indukčného kroku hotový.

1	9	10	11	12	13	14	15	17
2	1	9	10	11	12	13	14	15
3	2	18	24	25	26	27	28	30
4	3	19	18	24	25	26	27	28
5	4	20	19	31	35	36	37	39
6	5	21	20	32	31	35	36	37
7	6	22	21	33	32	40	42	44
8	7	23	22	34	33	41	40	42
16	8	29	23	38	34	43	41	45

Obr. 7: Príklad poskupinkovania políčok pre šachovnicu 9×9

Riešenie úlohy 39

Úlohu si najskôr preformulujeme. Nech $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ je postupnosť, kde a_i je počet oviec, ktoré zjedol vlk v i -ty deň. Definujeme postupnosť $(s_0, s_1, \dots, s_n)$, kde

$$s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i, \quad \text{pre } i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Špeciálne z toho máme, že $s_0 = 0$, nakoľko ide o prázdny súčet, a vďaka podmienke zo zadania $s_n = 100$. Keďže vlk zje každý deň aspoň jednu ovцу, postupnosť $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ je rastúca. Zjavne, pre $0 \leq i < j \leq n$, súvislá podpostupnosť $a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j$ má súčet 20 práve vtedy, keď $s_j - s_i = 20$. Teda chceme nájsť najmenšie také n , pre ktoré v postupnosti $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ existujú dva členy s rozdielom 20. Ukážeme, že hľadaným najmenším n je $n = 60$.

Rozdeľme si čísla $\{0, 1, 2, \dots, 100\}$, teda možné hodnoty členov postupnosti $(s_0, s_1, \dots, s_n)$, na 60 množín:

- $\{x, x+20\}$ pre $x \in \{0, 1, \dots, 19\}$ (20 množín),
- $\{x, x+20\}$ pre $x \in \{40, 41, \dots, 59\}$ (20 množín),

- $\{80, 100\}$ (1 množina),
- $\{x\}$ pre $x \in \{81, 82, \dots, 99\}$ (19 množín).

Ak je $n \geq 60$, tak má postupnosť $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ aspoň 61 členov. Keďže je to viac ako množín, tak z Dirichletovho princípu musí existovať jedna množina, ktorá obsahuje členy s_i a s_j ($0 \leq i < j \leq n$), pre ktoré teda z definície našich množín platí $s_j - s_i = 20$, čo sme chceli ukázať. (Všimnite si, že postupnosť s -iek obsahuje o 1 člen viac, ako máme počet dní, keďže sme zahrnuli do nej aj súčet pred prvým dňom.)

Pre $n = 59$ vieme vybrať postupnosť

$$(s_0, s_1, \dots, s_{59}) = (0, 1, 2, \dots, 19, 40, 41, 42, \dots, 59, 81, 82, \dots, 100),$$

ktorá neobsahuje dve čísla s rozdielom 20: v rámci podpostupností $(0, 1, 2, \dots, 19)$; $(40, 41, 42, \dots, 59)$ a $(81, 82, \dots, 100)$ vieme dostať rozdiel najviac 19 a rozdiely čísel z dvoch pospostupností sú aspoň 21. Taktiež, pre $n < 59$ dostaneme protipríklad vynechaním členov okrem prvého a posledného. Teda pre $n < 60$ existuje postupnosť $(s_0, s_1, \dots, s_n)$, ktoré neobsahuje dva členy s rozdielom 20.

Poznámka. Naše rozdelenie na množiny vyzerá nasledovne:

$\{0, 20\}$	$\{40, 60\}$	$\{80, 100\}$
$\{1, 21\}$	$\{41, 61\}$	$\{81\}$
$\{2, 22\}$	$\{42, 62\}$	$\{82\}$
$\{3, 23\}$	$\{43, 63\}$	$\{83\}$
$\{4, 24\}$	$\{44, 64\}$	$\{84\}$
$\{5, 25\}$	$\{45, 65\}$	$\{85\}$
$\{6, 26\}$	$\{46, 66\}$	$\{86\}$
$\{7, 27\}$	$\{47, 67\}$	$\{87\}$
$\{8, 28\}$	$\{48, 68\}$	$\{88\}$
$\{9, 29\}$	$\{49, 69\}$	$\{89\}$
$\{10, 30\}$	$\{50, 70\}$	$\{90\}$
$\{11, 31\}$	$\{51, 71\}$	$\{91\}$
$\{12, 32\}$	$\{52, 72\}$	$\{92\}$
$\{13, 33\}$	$\{53, 73\}$	$\{93\}$
$\{14, 34\}$	$\{54, 74\}$	$\{94\}$
$\{15, 35\}$	$\{55, 75\}$	$\{95\}$
$\{16, 36\}$	$\{56, 76\}$	$\{96\}$
$\{17, 37\}$	$\{57, 77\}$	$\{97\}$
$\{18, 38\}$	$\{58, 78\}$	$\{98\}$
$\{19, 39\}$	$\{59, 79\}$	$\{99\}$