

Cvičenie 9: Asymptotické odhady

Definícia 1. Nech $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sú funkcie. Potom píšeme:

- (i) $f(n) = O(g(n))$ (f rastie nanejvýš tak rýchlo ako g), ak existuje $c > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ platí $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$.
- (ii) $f(n) = \Omega(g(n))$ (f rastie aspoň tak rýchlo ako g), ak $g(n) = O(f(n))$. Môžeme tiež používať ekvivalentnú definíciu: existuje $c > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ platí $|f(n)| \geq c \cdot |g(n)|$.
- (iii) $f(n) = \Theta(g(n))$ alebo $f(n) \asymp g(n)$ (f sa rádovo rovná g), ak $f(n) = O(g(n))$ a zároveň $g(n) = O(f(n))$.
- (iv) $f(n) = o(g(n))$ (f rastie pomalšie ako g), ak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.
- (v) $f(n) = \omega(g(n))$ (f rastie rýchlejšie ako g), ak $g(n) = o(f(n))$.
- (vi) $f(n) \sim g(n)$ (f sa asymptoticky rovná g), ak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

Uvedenú definíciu možno rozšíriť aj na funkcie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – v takom prípade je možné študovať asymptotické vlastnosti funkcií nielen pre $x \rightarrow \infty$, ale aj pre $x \rightarrow a$, kde a je ľubovoľný prvok rozšírenej reálnej osi.

Aj keď je horeuvedená definícia sformulovaná pre ľubovoľné $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, zvyčajne budeme pracovať s funkciami, ktoré sú nezáporné pre všetky alebo takmer všetky n . (Hovoríme, že nejaké tvrdenie platí *pre takmer všetky* $n \in \mathbb{N}$, ak platí pre všetky $n \in \mathbb{N}$ až na konečný počet výnimiek. Inak povedané, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že vlastnosť platí pre všetky $n \geq n_0$.) V takom prípade možno bod (i), a teda aj bod (ii), preformulovať aj bez použitia absolútnych hodnôt.

→ **Úloha 1.** Dokážte alebo vyvráťte:

- a) $n^3 - 5n^2 + \frac{1}{2}n + 4 = O(n^3)$.
- b) $n^3 - 5n^2 + \frac{1}{2}n + 4 = \Theta(n^3)$.
- c) $n^3 - 5n^2 + \frac{1}{2}n + 4 = o(n^3)$.
- d) $n^3 - 5n^2 + \frac{1}{2}n + 4 \sim n^3$.

→ **Úloha 2.** Dokážte alebo vyvráťte:

- a) $n^2 = O(n^3)$.
- b) $n^2 = \Theta(n^3)$.
- c) $n^2 = o(n^3)$.
- d) $n^2 \sim n^3$.

Úloha 3. Dokážte alebo vyvráťte:

- a) $2 \log n = O(\log n)$.
- b) $2 \log n = \Theta(\log n)$.
- c) $2 \log n = o(\log n)$.
- d) $2 \log n \sim \log n$.

Úloha 4. Dokážte alebo vyvráťte:

a) $2 \log n = O(n)$.

b) $2 \log n = \Theta(n)$.

c) $2 \log n = o(n)$.

d) $2 \log n \sim n$.

Úloha 5. Dokážte alebo vyvráťte:

a) $2^{n+1} = \Theta(2^n)$.

b) $2^{2n} = \Theta(2^n)$.

Úloha 6. Nech $x, y \in \mathbb{R}$. Ak $n^x = \Theta(n^y)$, tak $x = y$. Dokážte.

→ **Úloha 7.** Dokážte alebo vyvráťte:

a) $2^n + (-1)^n 2^n = O(2^n)$.

b) $2^n + (-1)^n 2^n = \Theta(2^n)$.

Úloha 8. Dokážte alebo vyvráťte:

a) $n \cdot 2^n = O(2^n)$.

b) $n \cdot 2^n = \Omega(2^n)$.

c) $n \cdot 2^n = o(2^n)$.

d) $n \cdot 2^n = \omega(2^n)$.

Úloha 9. Dokážte alebo vyvráťte:

a) $n! = O(2^n)$.

b) $2^n = O(n!)$.

Úloha 10. Dokážte alebo vyvráťte:

a) $n! = O(n^n)$.

b) $n^n = O(n!)$.

Úloha 11. Dokážte, že platí

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \Theta(n^4).$$

Úloha 12. (*) Dokážte, že platí

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \Theta(\log n).$$

Úloha 13. Dokážte alebo vyvráťte: $F_n = \Theta([(1 + \sqrt{5})/2]^n)$.

Úloha 14. Zistite, či existuje konštanta $a \in \mathbb{R}$ taká, že $\log n = \Theta(n^a)$.

Úloha 15. Nech $f, g, h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ sú funkcie. Dokážte alebo vyvráťte:

→ a) Ak $f(n) = O(g(n))$, tak $f(n) = o(g(n))$.

- b) Ak $f(n) = o(g(n))$, tak $f(n) = O(g(n))$.
- c) Ak $f(n) = \omega(g(n))$, tak $f(n) = \Omega(g(n))$.
- d) Ak $f(n) = \Theta(g(n))$, tak $f(n) \sim g(n)$.
- e) Ak $f(n) \sim g(n)$, tak $f(n) = \Theta(g(n))$.
- f) Ak $f(n) = o(g(n))$, tak $f(n) \neq \Omega(g(n))$.
- g) Ak $f(n) \neq \Omega(g(n))$, tak $f(n) = o(g(n))$.
- h) Ak $f(n) \leq g(n)$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, tak $f(n) = O(g(n))$.
- i) Ak $f(n) = O(g(n))$ a zároveň $g(n) = O(h(n))$, tak $f(n) = O(h(n))$.
- j) Ak $f(n) = o(g(n))$ a zároveň $g(n) = o(h(n))$, tak $f(n) = o(h(n))$.
- k) Ak $f(n) = O(g(n))$ a zároveň $f(n) \neq \Theta(g(n))$, tak $f(n) = o(g(n))$.

Úloha 16. Dokážte alebo vyvráťte:

- a) Pre ľubovoľné $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ platí $f(n) = O(g(n))$, alebo $g(n) = O(f(n))$.
- b) Pre ľubovoľné rastúce $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ platí $f(n) = O(g(n))$, alebo $g(n) = O(f(n))$.

Úloha 17. Nech $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sú funkcie. Dokážte, že $f(n) = o(g(n))$ práve vtedy, keď pre všetky $c > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre všetky $n \geq n_0$ platí $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$.

→ **Úloha 18.** Dokážte alebo vyvráťte:

- a) $\log n = O(\sqrt{n})$.
- b) $\log n = \Theta(\sqrt{n})$.
- c) $\log n = o(\sqrt{n})$.
- d) $\log n \sim \sqrt{n}$.

Úloha 19. Nech $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia taká, že $f(n) = O(2^n)$. Dokážte alebo vyvráťte:

- a) $2^n + |f(n)| = O(2^n)$.
- b) $|2^n - |f(n)|| = O(2^n)$.

Úloha 20. Nech $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia taká, že $f(n) = \Theta(2^n)$. Dokážte alebo vyvráťte:

- a) $2^n + |f(n)| = \Theta(2^n)$.
- b) $|2^n - |f(n)|| = \Theta(2^n)$.

Odhadnúť funkciu $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ s presnosťou $O(g(n))$ znamená nájsť takú funkciu h , pre ktorú platí $f(n) = h(n) + O(g(n))$. Presnejšie tu ide o *absolútnu presnosť*. Existuje ešte odhad s relatívnou presnosťou, kedy f vyjadríme v tvare $f(n) = h(n)(1 + O(g(n)))$.

Úloha 21. Odhadnite nasledovné funkcie s požadovanou presnosťou.

- a) $(2n^4 + 3n^3 - 5n^2 - 2n + 4)(2n^3 - 3n^2 + 42 - 7)$ s presnosťou $O(n^4)$
- b) $(2n + n^3)^{42}$ s presnosťou $O(n^{120})$
- c) $n^{\frac{17}{2}}$ s presnosťou $O(n^{15})$
- d) $(3n^5 - 2n^4 + O(n^3))(n^6 + 2n^5 + O(n^4))$ s presnosťou $O(n^9)$

Ako dokazovať asymptotické odhady súm?

1. Upraviť sumu na uzavretý tvar (bez sumy) a spraviť odhad preň.
2. Odhadnúť každý člen samostatne, ideálne nezávisle na sumačnej konštante (napr. $\sum_{k=1}^n k^3 \leq \sum_{k=1}^n n^3$). Pri dolnom odhade sa často oplatí zdola odhadnúť polovicu členov sumy ($\sum_{k=1}^n k^3 \geq \sum_{k=n/2}^n (n/2)^3$).
3. Spraviť dolný a horný odhad pomocou integrálu.

Symbol $O(g(n))$ je výhodné interpretovať ako množinu všetkých funkcií $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ takých, že $f(n) = O(g(n))$. Formálne korektnejšie by teda bolo namiesto $f(n) = O(g(n))$ písať $f(n) \in O(g(n))$; tento spôsob zápisu ale veľmi rozšírený nie je. Podobne interpretujeme aj symboly $\Omega(g(n))$, $\Theta(g(n))$, $o(g(n))$ a $\omega(g(n))$.

Nech teraz A je ľubovoľná množina a \circ je ľubovoľná binárna operácia na prvkoch množiny A . Pre $a \in A$ a $B \subseteq A$ potom pod zápisom $a \circ B$ chápeme množinu

$$a \circ B = \{a \circ b \mid b \in B\}.$$

Podobne, pre $B, C \subseteq A$ chápeme pod zápisom $B \circ C$ množinu

$$B \circ C = \{b \circ c \mid c \in C\}.$$

V tomto duchu treba chápať aj zápisy ako $f(n) + O(g(n))$ alebo $O(f(n)) + O(g(n))$.

K úlohám 15 a 15:

Veta 1. Nech $f, g, h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ sú funkcie. Potom platí

- a) Ak $f(n) = o(g(n))$, tak $f(n) = O(g(n))$.
- b) Ak $f(n) = \omega(g(n))$, tak $f(n) = \Omega(g(n))$.
- c) Ak $f(n) \sim g(n)$, tak $f(n) = \Theta(g(n))$.
- d) Ak $f(n) = o(g(n))$, tak $f(n) \neq \Omega(g(n))$.
- e) Ak $f(n) \leq g(n)$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, tak $f(n) = O(g(n))$.
- f) Ak $f(n) = O(g(n))$ a zároveň $g(n) = O(h(n))$, tak $f(n) = O(h(n))$.
- g) Ak $f(n) = o(g(n))$ a zároveň $g(n) = o(h(n))$, tak $f(n) = o(h(n))$.

Nasledovné vlastnosti (ktoré očakávame od usporiadaní) však vo všeobecnosti neplatia:

- d) Ak $f(n) = \Theta(g(n))$, tak $f(n) \sim g(n)$. ($f(n) = 1$, $g(n) = 2$)
 - e) Ak $f(n) \neq \Omega(g(n))$, tak $f(n) = o(g(n))$.
 - f) Ak $f(n) = O(g(n))$ a zároveň $f(n) \neq \Theta(g(n))$, tak $f(n) = o(g(n))$. ($f(n) = 0$ pre párne n , inak 1; $g(n) = 2$)
- 14a) $f(n) = O(g(n))$ alebo $g(n) = O(f(n))$. ($f(n) = 0$ pre párne n , inak 1; $g(n) = 1$ pre párne n , inak 0.)

Riešenia úloh

3. Iba c) neplatí.

4. Platí a), c).
8. Platí b), d).
9. Platí b)
10. Platí a)
18. Platí a), c). Dokážte najprv c) a z toho odvodíte platnosť a).