

Cvičenie 9: Grafy I – základné pojmy

Definícia 1. Graf je dvojica $G = (V, E)$, kde V je neprázdna konečná množina a

$$E \subseteq \binom{V}{2}.$$

Prvky množiny V nazývame *vrcholmi*, prvky množiny E nazývame *hranami*.

Ak v grafe $G = (V, E)$ pre nejaké (nie nutne rôzne) vrcholy $u, v \in V$ a hranu $e \in E$ platí $e = \{u, v\}$, hovoríme, že *hrana e je incidentná s vrcholmi u a v* . Pod *rádom grafu* rozumieme počet prvkov množiny V .

Uvedená terminológia nie je úplne ustálená a môže sa od zdroja k zdroju líšiť. Takto definovaný pojem „graf“ sa napríklad často označuje ako jednoduchý graf; niektoré hrany pripúšťajú násobné / paralelné hrany (multigrafy), slučky vo vrcholoch alebo orientované hrany.

Definícia 2. Nech $G = (V, E)$ je graf a $k \in \mathbb{N}$. Graf G je *k -regulárny*, ak pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) = k$. Graf G je regulárny, ak je k -regulárny pre nejaké k .

Úloha 1. Rozhodnite, či existuje graf, ktorého vrcholy majú stupne:

→ a) 4, 3, 2, 2, 1, 0;

b) 4, 2, 2, 2, 1, 1;

→ c) 6, 4, 3, 3, 2, 2, 1;

→ d) 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1;

e) 6, 6, 5, 4, 2, 2, 1;

→ f) 8, 7, 7, 6, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 1.

→ **Úloha 2.** Dokážte, že v každom jednoduchom grafe, ktorý má aspoň dva vrcholy, existujú aspoň dva vrcholy s rovnakým stupňom.

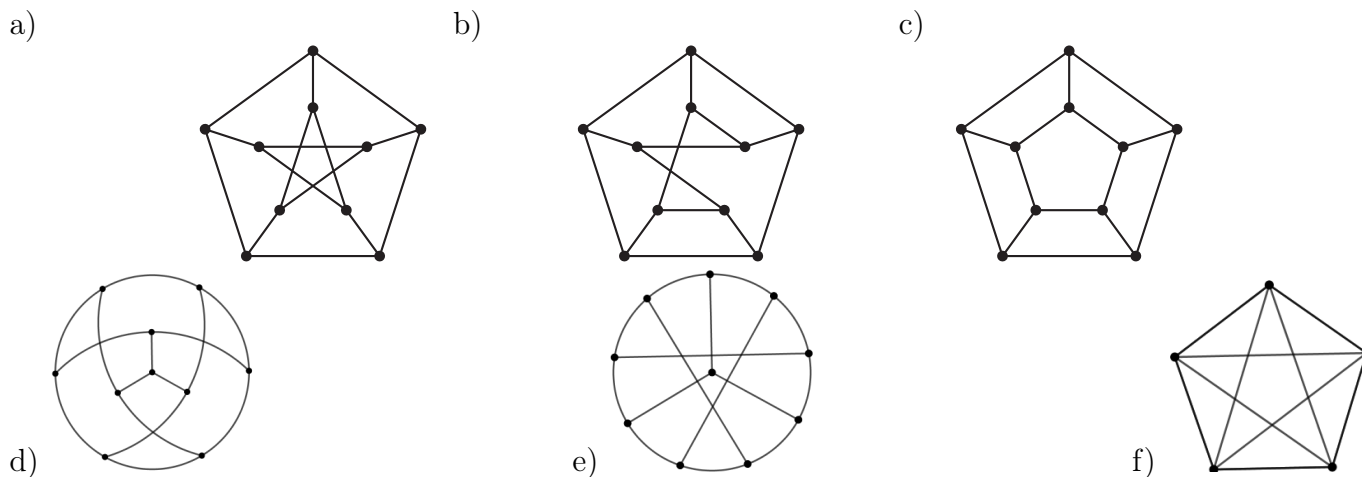
→ **Úloha 3.** Nájdite všetky dvojice $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ také, že existuje aspoň jeden k -regulárny jednoduchý graf rádu n .

→ **Úloha 4.** Nech $n \geq 1$ je prirodzené číslo. Nájdite počet všetkých jednoduchých grafov na množine vrcholov $V = \{1, \dots, n\}$.

Úloha 5. Nech $n, k \geq 1$ sú prirodzené čísla. Nájdite počet všetkých jednoduchých grafov na množine vrcholov $V = \{1, \dots, n\}$, ktoré majú práve k hrán.

Úloha 6. Nájdite všetky navzájom neizomorfné 3-regulárne grafy rádu 6.

→ **Úloha 7.** Zistite, ktoré z nasledujúcich grafov sú izomorfné.



→ **Úloha 8.** Nech $G = (V, E)$ je graf taký, že pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) \geq 2$. Dokážte, že graf G musí nutne obsahovať kružnicu.

Úloha 9. Dokážte, že v ľubovoľnom 2-regulárnom grafe leží každý vrchol na práve jednej kružnici.

Úloha 10. Popíšte všetky grafy, ktoré neobsahujú žiadnu cestu dĺžky 3.

→ **Úloha 11.** Dokážte, že každý graf G obsahuje cestu dĺžky $\delta(G)$ a kružnicu dĺžky aspoň $\delta(G) + 1$ (pre $\delta(G) \geq 2$), kde $\delta(G)$ je najmenší stupeň grafu.

→ **Úloha 12.** Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý graf rádu n taký, že pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) \geq (n - 1)/2$. Dokážte, že graf G musí byť nutne súvislý.

Úloha 13. Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý graf rádu n taký, že pre každú dvojicu nesusedných vrcholov u, v platí $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n - 1$. Dokážte, že G musí byť nutne súvislý.

→ **Úloha 14.** Dokážte, že ľubovoľné dve najdlhšie cesty v súvislom grafe majú spoločný vrchol. Majú aj spoločnú hranu?

→ **Úloha 15.** Nech $G = (V, E)$ je ľubovoľný graf. Dokážte alebo vyvráťte:

- Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje $u-v$ -sled, tak existuje aj cesta začínajúca v u a končiacia vo v .
- Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje $u-v$ -ťah, tak existuje aj cesta začínajúca v u a končiacia vo v .
- Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje $u-v$ -sled, tak existuje aj ťah začínajúci v u a končiaci vo v .
- Ak pre vrchol $u \in V$ existuje uzavretý sled nenulovej dĺžky prechádzajúci cez u , tak existuje aj kružnica prechádzajúca cez u .
- Ak pre vrchol $u \in V$ existuje uzavretý ťah nenulovej dĺžky prechádzajúci cez u , tak existuje aj kružnica prechádzajúca cez u .

Úloha 16. Dokážte, že ak graf $G = (V, E)$ obsahuje aspoň jeden uzavretý sled nepárnej dĺžky, tak obsahuje aj kružnicu nepárnej dĺžky.

Úloha 17. Nech $n \geq 1$. Nájdite najmenšie $k(n) \in \mathbb{N}$ také, že všetky jednoduché grafy rádu n s $k(n)$ hranami sú súvislé.

→ **Úloha 18.** Dokážte, že komplementárny graf k nesúvislému grafu je súvislý. (Komplementárny graf grafu G je taký graf G' , pre ktorý platí $V(G') = V(G)$ a $E(G') = \binom{V}{2} - E(G)$.)

Úloha 19. Dokážte, že

- pre každý jednoduchý graf o n vrcholoch, e hranách a k komponentoch platí $n - k \leq e \leq (n - k + 1)(n - k)/2$ a
- pre všetky l také, že $n - k \leq l \leq (n - k + 1)(n - k)/2$ existuje graf o n komponentoch, l hranách a k komponentoch.

Riešenia

1. Neexistujú:

c) nemôže mať tri vrcholy nepárneho stupňa

d) vrchol stupňa 7 má len 6 ďalších, s ktorými môže byť spojený

e) dva vrcholy stupňa 6 musia byť spojené s každým ostatným, čo poruší stupeň 1. f) z vrcholov stupňov 8, 7, 7, 6 vychádza aspoň $5 + 4 + 4 + 3 = 16$ hrán, ale do zvyšných vrcholov môže vchádzať najviac $3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 14$ hrán

2. Graf rádu n nemôže mať vrchol stupňa 0 a aj $n - 1$.

3. Musí platiť $n > k$ a ak n je nepárne, tak k musí byť párne.

4. $2^{n(n-1)/2}$

5. $\binom{n(n-1)/2}{k}$

6. $K_{3,3}$ a K_4 , kde sme jeden vrchol nahradili trojuholníkom.

7. Triedy izomorfnych grafov sú $\{a), d), e)\}$, $\{b)\}$, $\{c)\}$, $\{f)\}$

f) obsahuje ako jediný 5 vrcholov

b), c) obsahujú kružnice dĺžky 4, pričom v grafe c) sa každá hrana nachádza v nejakej kružnici dĺžky 4.

9. Ak by ležal na viacerých, tak vrchol, v ktorom sa kružnice rozpoja, má veľký stupeň.

10. Grafy, v ktorých každý komponent je buď C_3 , alebo hviezda – graf, kde je jeden vrchol spojený s hranou s ďalšími i vrcholmi (a žiadne iné hrany neobsahuje), $i \geq 0$

11.

12. Každé dva nesusedné vrcholy majú spoločného suseda.

13. Podobne ako predchádzajúca úloha.

14. Spojnica najdlhších ciest ich rozdelí každú na dva úseky. Zoberte dlhšie z nich. Hranu nemusia mať spoločnú.

15. a) Áno – zoberte si najkratší $u-v$ -sled, ktorý nie je cestou a nájdite kratší

b) Áno, je to dôsledok a)

c) Áno, je to dôsledok a).

d) Nie – Napr. ťah u, x, u .

e) Áno, znovu stačí uvažovať najkratší ťah

16. Nájdite v ňom kružnicu. Ak má párnú dĺžku, tak využite vo zvyšku sledu indukčný predpoklad.

17. $(n-1)(n-2)/2$: ak má jeden komponent veľkosť a , tak graf môže mať najviac $a(a-1)/2 + (n-a)(n-a-1)/2 = 2a^2 - 2an + n(n-1)/2$ hrán, čo nadobúda maximum pre $a = 1$ a $a = n-1$. Dosiahne sa na grafe K_{n+1} + izolovaný vrchol.

18.

Riešenie úlohy 15a)

Ukážka dvoch spôsobov, ako spisovať dôkazy, kde opakujeme nejaký krok. Hlavná myšlienka je vyznačená modrou, spoločná pre obe riešenia.

Matematická indukcia

Nech u, v sú vrcholy grafu G . Úplnou matematickou indukciou podľa n dokážeme, že ak v grafe G existuje u - v -sled dĺžky n , tak existuje v ňom aj u - v -cesta. Pre $n = 0$ tvrdenie zjavne platí (sled (u) je aj cestou).

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky $n < k$, pre nejaké $k > 0$. Ukážeme, že tvrdenie platí aj pre $n = k$. Nech teda $P = (u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k = v)$ je u - v sled dĺžky k . Ak sa v ňom neopakujú vrcholy, tak ide o cestu a dôkaz je hotový. **Predpokladajme teda, že sled P nie je cestou, teda že pre nejaké $i < j$ platí $v_i = v_j$.** Potom $P' = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_i, v_i = v_j, e_{j+1}, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ je u - v -sled dĺžky kratšej ako k . Preto podľa indukčného predpokladu existuje u - v -cesta v grafe G . Tým je dôkaz indukciou dokončený

Extremálny princíp

Nech u, v sú vrcholy grafu G a nech $P = (u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k = v)$ je najkratší u - v -sled grafu G (ktorý existuje, keďže aspoň jeden u - v -sled v grafe G máme). **Predpokladajme teda, že sled P nie je cestou, teda že pre nejaké $i < j$ platí $v_i = v_j$.** Potom $P' = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_i, v_i = v_j, e_{j+1}, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ je u - v -sled dĺžky kratšej ako k . To je v spore s tým, že P je najkratší u - v -sled. Preto P musí byť cesta.