

## Cvičenie 10: Grafy II – Stromy

**Úloha 1.** Je riešenie nasledovnej úlohy správne?

*Zadanie.* Dokážte, že každý  $n$ -vrcholový graf  $G$  s  $\delta(G) \geq 3$  obsahuje kružnicu dĺžky 4.

### Pokus o riešenie

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa  $n$ . Graf s minimálnym stupňom vrchola 3 musí mať aspoň 4 vrcholy. Ak  $n = 4$ , tak  $G = K_4$  (úplný graf na 4 vrcholov), ktorý obsahuje kružnicu dĺžky 4.

Predpokladajme teraz, že tvrdenie platí pre nejaké  $n$  a dokážeme, že platí aj pre  $n+1$ . Vezmime si  $n$ -vrcholový graf  $G$  s minimálnym stupňom aspoň 3. Podľa indukčného predpokladu obsahuje kružnicu dĺžky 4. Ak do grafu  $G$  pridáme nový vrchol stupňa aspoň 3, tak dostaneme  $(n+1)$ -vrcholový graf  $G'$ . Nový graf  $G'$  má tiež minimálny stupeň aspoň 3 (lebo sme len pridali hrany) a stále obsahuje kružnicu dĺžky 4. Tvrdenie teda platí aj pre  $n+1$ , čím je dôkaz indukciou hotový.

**Definícia 1.** Graf  $G = (V, E)$  je *acyklický*, ak neobsahuje žiadnu kružnicu. *Strom* je ľubovoľný súvislý acyklický graf.

**Veta 1.** Nech  $G = (V, E)$  je jednoduchý graf. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

- (i)  $G$  je strom.
- (ii) Ľubovoľné dva vrcholy grafu  $G$  sú spojené práve jednou cestou.
- (iii) Graf  $G$  je súvislý a po odobraní ľubovoľnej hrany vznikne z grafu  $G$  nesúvislý graf. ( $G$  je minimálne súvislý)
- (iv) Graf  $G$  je acyklický a po pridaní ľubovoľnej hrany vznikne kružnica. ( $G$  je maximálne acyklický)
- (v)  $G$  je súvislý graf rádu  $n \in \mathbb{N}$  s  $n - 1$  hranami.
- (vi)  $G$  je acyklický graf rádu  $n \in \mathbb{N}$  s  $n - 1$  hranami.

**Definícia 2.** Nech  $T = (V, E)$  je strom. *List* je ľubovoľný vrchol  $v \in V$  taký, že  $\deg_T(v) = 1$ .

**Úloha 2.** Dokážte, že každý netriviálny strom má aspoň dva listy.

**Úloha 3.** Dokážte, že strom s  $n$  vrcholmi má práve  $n - 1$  hrán.

**Úloha 4.** Nájdite všetky stromy  $T = (V, E)$  obsahujúce vrchol  $v \in V$  taký, že  $\deg_T(v) = 0$ .

**Úloha 5.** Koľko najmenej a koľko najviac listov môže mať strom na  $n$  vrcholoch?

→ **Úloha 6.** Dokážte vetu 1

→ **Úloha 7.** Dokážte, že každý strom  $T$  má aspoň  $\Delta(T)$  listov.

→ **Úloha 8.** O strome  $T$  vieme, že má

- 4 vrcholy stupňa 2,
- 2 vrcholy stupňa 3,
- 7 vrcholov stupňa 4,

- maximálny stupeň 4.

Koľko môže mať strom  $T$  listov?

**Úloha 9.** Nájdite všetky regulárne stromy.

**Úloha 10.** Dokážte, že pre každý súvislý graf  $G$  a ľubovoľný jeho vrchol  $r$  existuje kostra  $T$  grafu  $G$  taká, že pre každý vrchol  $v$  grafu  $G$  je  $v$ - $r$ -cesta v kostre  $T$  najkratšou  $v$ - $r$ -cestou v grafe  $G$ .

→ **Úloha 11.** Dokážte, že vrcholy stromu možno očíslovať  $v_1, v_2, \dots, v_n$  tak, že pre každé  $i \geq 2$  má vrchol  $v_i$  práve jedného suseda v množine  $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$ .

→ **Úloha 12.** Dokážte, že pre každý súvislý graf  $G$  a ľubovoľný jeho vrchol  $v$  existuje kostra  $T$  grafu  $G$  taká, že pre každý vrchol  $u$  grafu  $G$  je  $v$ - $u$ -cesta v kostre  $T$  najkratšou  $v$ - $u$ -cestou v grafe  $G$ .

**Úloha 13.** Nech  $G$  je súvislý 3-regulárny graf. Dokážte, že graf  $G$  má takú kostru  $T$ , že každá kružnica grafu  $G$  má s kostrou  $T$  aspoň jednu spoločnú hranu.

## Prehľadávanie grafov (\*)

Pri programovaní sa stretáme s rôznymi spôsobmi, ako možno graf prehľadávať. Existuje ich viacero a sú rôzne spôsoby, ako ich vieme formálne definovať. Základnou spoločnou črtou je, že prehľadávanie by malo byť kostrou grafu. Jeden spôsob sme načrtli v úlohe 11, kde vrcholy kostry očísľujeme podľa poradia ich objavenia. Formálne jednoduchší spôsob je definovať *prehľadávanie grafu  $G$  ako zakorenenú kostru*, teda usporiadanú dvojicu  $(T, r)$ , kde  $T$  je kostra grafu  $G$  a  $r$  je ľubovoľný vrchol grafu  $G$  nazývaný *koreň*. Jediné, čo to znamená, je, že sme jeden z vrcholov kostry prehlásili za špeciálny.

### Prehľadávanie do šírky (BFS)

*Prehľadávanie grafu  $G = (V, E)$  do šírky* je kostra  $T$  grafu  $G$  zakorenenú vo vrchole  $r$  taká, že pre každý vrchol  $v$  grafu  $G$  je  $v$ - $r$ -cesta v kostre  $T$  najkratšou  $v$ - $r$ -cestou v grafe  $G$ .

### Prehľadávanie do hĺbky (DFS)

V zakorenenom strome  $(T, r)$  (teda aj v kostre) vieme hovoriť o tom, že nejaký vrchol je pod iným: *vrchol  $u$  je pod vrcholom  $v$*  ak (jediná)  $u$ - $r$ -cesta v strome  $T$  prechádza vrcholom  $v$ . (Záujemcovia si môžu rozmyslieť, že po pridaní reflexívnosti ide o usporiadanie množiny  $V(G)$ , vo väčšine stromov neúplné.)

*Prehľadávanie grafu  $G = (V, E)$  do hĺbky* definujeme ako kostru  $T$  grafu  $G$  zakorenenú vo vrchole  $r$  takú, že pre každú hranu  $uv \in E(G)$  je vrchol  $u$  pod vrcholom  $v$  alebo naopak.

**Veta 2.** Každý súvislý graf  $G$  obsahuje pre každý vrchol  $r \in V(G)$  kostru  $T$  zakorenenú vo vrchole  $r$ , ktorá je prehľadávaním do hĺbky.

*Dôkaz.* Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou vzhľadom na počet vrcholov grafu.

Nech  $n \in \mathbb{N}$  a predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky súvislé grafy s menej ako  $n$  vrcholmi. Uvažujme  $n$ -vrcholový graf  $G$  a jeho vrchol  $r$ . Po odstránení vrchola  $r$  dostaneme  $k \geq 1$  komponentov súvislosti  $G_1, G_2, \dots, G_k$ . Keďže graf  $G$  je súvislý, tak v každom komponente  $G_i$  existuje vrchol  $r_i$ , ktorý susedí s vrcholom  $r$ . Každý komponent  $G_i$  má menej ako  $n$  vrcholov, preto podľa indukčného predpokladu má prehľadávanie do hĺbky  $(T_i, r_i)$ . Nech  $T$  je podgraf  $G$ , ktorý vznikne zjednotením podgrafov  $T_1, T_2, \dots, T_k$  a pridaním hrán  $rr_1, rr_2, \dots, rr_k$ . Dokážeme, že podgraf  $T$  je prehľadávaním do hĺbky:

- $T$  je súvislý: Z každého jeho vrcholu  $v$  zjavne existuje cesta do vrcholu  $r$ , z čoho vyplýva súvislosť.
- $T$  je acyklický: V jeho podgrafoch  $T_i$  sa nenachádza kružnica. Každé z pridaných hrán  $rr_i$  je mostom, preto neleží na kružnici.
- Je to prehľadávaním do hĺbky: Uvažujme ľubovoľnú hranu  $uv \in E(G)$ . Ak jeden z jej vrcholov je koreň, BUNV  $u = r$ , tak vrchol  $v$  je pod  $u$ . Ďalej uvažujme, že  $u \neq r \neq v$ . Vtedy  $u$  aj  $v$  musia byť vrcholy rovnakého komponentu  $G_i$ , keďže medzi komponentmi súvislosti nemôže viesť hrana. Potom z indukčného predpokladu dostávame, že jeden z vrcholov hrany  $uv$  je pod druhým.

□

## Riešenia

4. 1-vrcholový graf
5. Najmenej 2: cesta. Najviac  $n - 1$ : hviezda.
7. Zoberte si vrchol najväčšieho stupňa a nájdite listy v podstromoch, ktoré sú naň zavesené
8. 18
9. 1-vrcholový graf