Cvičenie 11: Bipartitné a eulerovské grafy

Bipartitné grafy

Úloha 1. Nech $n, m \geq 1$ sú prirodzené čísla. Nájdite počet všetkých jednoduchých bipartitných grafov na množine vrcholov $V = \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m\}$, ktorých partie sú dané množinami vrcholov $V_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ a $V_2 = \{v_1, \dots, v_m\}$.

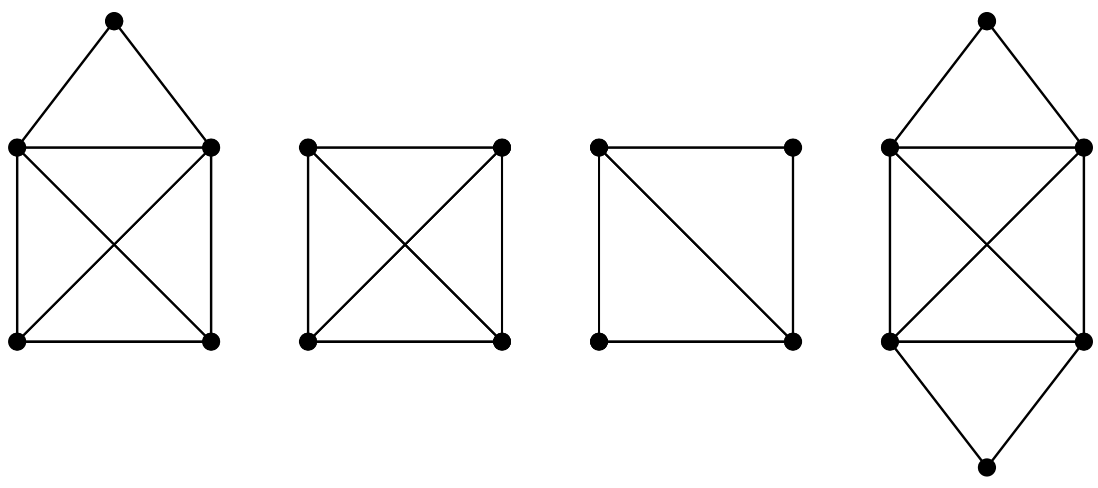
→ **Úloha 2.** Dokážte, že každý k-regulárny bipartitný graf ($k \geq 1$) musí mať párny počet vrcholov. Nájdite vhodné zosilnenie tohto tvrdenia.

→ **Úloha 3.** Nech G je súvislý 3-regulárny bipartitný graf. Dokážte, že ak z neho odstránime ľubovoľný vrchol, tak ostane súvislý.

→ **Úloha 4.** Nech G je súvislý 3-regulárny bipartitný graf. Dokážte, že ak z neho odstránime ľubovoľnú hranu, tak ostane súvislý.

> **Definícia 1.** Súvislý graf $G = (V, E)$ je *eulerovský*, ak v ňom existuje uzavretý ťah obsahujúci všetky hrany (*eulerovský ťah*).
>
> **Veta 1.** *Nech $G = (V, E)$ je súvislý graf. Graf G je eulerovský práve vtedy, keď sú stupne všetkých jeho vrcholov párne.*
>
> **Veta 2.** *Nech $G = (V, E)$ je súvislý graf. V grafe G existuje otvorený ťah obsahujúci všetky hrany práve vtedy, keď v grafe G existujú práve dva vrcholy nepárneho stupňa.*
>
> **Definícia 2.** Súvislý graf je *hamiltonoský*, ak v ňom existuje kružnica prechádzajúca cez všetky vrcholy.
>
> **Definícia 3.** *Hranový graf* $L(G)$ grafu G je graf, ktorého vrcholmi sú hrany grafu G a dva vrcholy sú spojené hranou práve vtedy, keď hrany, ktoré sú reprezentované vrcholmi $L(G)$, majú spoločný vrchol.

→ **Úloha 5.** Zistite, či sú nasledujúce grafy eulerovské:



→ **Úloha 6.** Zistite, či v grafoch z predchádzajúcej úlohy existuje otvorený ťah obsahujúci všetky hrany.

→ **Úloha 7.** Dokážte vetu 2.

→ **Úloha 8.** Nájdite všetky $n \geq 1$ také, že kompletný graf K_n je eulerovský.

Úloha 9. Nech $M = \{1, 2, \dots, 17\}$. Dokážte, že existuje postupnosť prvkov množiny $\binom{M}{5}$, v ktorej sa každá dvojca navzájom disjunktných 5-prvkových podmnožín množiny M nachádza práve raz vedľa seba.

Úloha 10. Hypotéza o dvojitom pokrytí kružnicami hovorí, že pre každý graf G, ktorý neobsahuje most, existuje multimnožina kružníc $\mathcal{K}$ taká, že každá hrana grafu G sa nachádza práve v dvoch kružniciach z $\mathcal{K}$. Dokážte, že táto hypotéza platí pre eulerovské grafy. (*Most* je taká hrana grafu, ktorej odstránením sa zvýši počet komponentov.)

Úloha 11. Dokážte, alebo vyvráťte masledujúce implikácie:

1. Graf G je eulerovský $\Rightarrow$ hranový graf $L(G)$ je eulerovský.
2. Hranový graf $L(G)$ je eulerovský $\Rightarrow$ graf G je eulerovský.

Úloha 12. Dokážte, že bipartitiný hamiltonovský graf má obe partície rovnakej veľkosti.

Úloha 13. Dokážte, že ak G je hamiltonovský alebo eulerovský, tak hranový graf $L(G)$ je hamiltonovský.

Úloha 14. Dokážte, že každý graf s n vrcholmi a minimálnym stupňom aspoň $2n/3$ je hamiltonovský.

Úloha 15. Máme graf G, ktorého vrcholy sú všetky 10-prvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \dots, 26\}$. Hranami sú spojené práve tie vrcholy A, B, pre ktoré sú množiny A, B disjunktné.

a) Koľko hrán má graf G?

b) Je graf G eulerovský?

c) Je graf G súvislý?

d) Je graf G bipartitný?

Vaše tvrdenia dokážte.

→ **Úloha 16.** Dokážte, že vrcholy každého grafu, ktorého minimálny stupeň je aspoň 1, možno rozdeliť na dve skupiny tak, že každý vrchol má suseda v druhej skupine ako je on sám.

Riešenia

2. Spočítame počet hrán a vyjde, že jeho partície musia byť rovnako veľké.

3.

4.

14. `http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~rajnik/uktg21/du/du3-riesenie.pdf`

16. `http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~rajnik/uktg21/du/du3-riesenie.pdf`

Riešenie úlohy 15

Označme $M = \{1, 2, \dots, 26\}$. Drobným chytákom v úlohe bolo, že na overenie toho, či je G eulerovský, bolo treba overiť súvislosť. Preto v riešení uvádzame najprv riešenie c) a potom b).

Podúloha a)

Graf má $\binom{26}{10}$ vrchol. Spočítame teraz stupeň vrchola A. K 10-prvkovej množine A musíme nájsť disjunktnú množinu B. Teda B nesmie obsahovať žiadny z 10 prvkov množiny A, teda máme na výber len $26 - 10 = 16$ prvkov. Stupeň A je teda $\binom{16}{10}$. Počet hrán je polovica súčtu stupňov, teda

$$\frac{\binom{26}{10} \cdot \binom{16}{10}}{2}.$$

Podúloha c)

Riešenie cez menenie prvkov po jednom. Nech A je 9-prvková podmnožina M a $x, y \in M - A$. Ukážeme, že medzi vrcholmi $A \cup \{x\}$ a $A \cup \{y\}$ je cesta dĺžky 2. Keďže $M - A - \{x, y\}$ má $26 - 11 = 15$ prvkov, tak vieme vybrať 10-prvkovú množinu $B \subseteq M - A - \{x, y\}$, ktorá je disjunktná aj s $A \cup \{x\}$, aj s $A \cup \{y\}$. Tým sme našli hľadanú cestu. Opakovaným využitím tejto cesty sa vieme zostrojiť sled medzi ľubovoľnými dvomi vrcholmi A, B – postupne budeme meniť prvky, v ktorých sa A a B líšia, výmena jedného prvku nám pridá do sledu dve hrany. A ak máme A-B-sled, tak máme aj A-B-cestu, teda graf je súvislý.

Formálne poriadne sa toto riešenie dá podať cez matematickú indukciu. Dokážeme, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí: ak sa vrcholy A, B líšia v n prvkoch, tak G obsahuje A-B-sled. Pre $n = 0$ máme $A = B$ a vyhovuje sled nulovej dĺžky. Predpokladajme platnosť tvrdenia pre n a uvažujme dva vrcholy A, B, ktoré sa líšia v $n + 1$ prvkoch – jednu dvojicu rozdielnych prvkov si označme $a \in A$, $b \in B$. Nech $B' = (B - \{b\}) \cup \{a\}$ (teda v B vymeníme b za a. Množiny A a B' sa líšia len v n prvkoch, preto podľa IP medzi nimi existuje sled. Tento sled potom doplníme: $B' \to C \to B$, kde C je 10-prvková podmnožina $M - B - \{a\}$, ktorá zjavne existuje, nakoľko vyberáme z 15-prvkovej podmnožiny.

Riešenie podľa počtu spoločných prvkov. Nájdeme cestu medzi ľubovoľnými dvomi rôznymi vrcholmi A, B. Hľadanie rozdelíme podľa toho, koľko prvkov spolu obsahujú

- $11 \leq |A \cup B| \leq 16$: Vtedy $|M - (A \cup B)| \geq 10$ a existuje 10-prvková podmnožina $X \subseteq M - (A \cup B)$. Máme tak cestu A, X, B.
- $17 \leq |A \cup B| \leq 19$: Vtedy $1 \leq |A \cap B| \leq 3$ a $|M - (A \cup B)| \geq 7$. Zostrojíme 10-prvkovú množinu X tak, že prvky $B - A$ doplníme prvkami z $M - (A \cup B)$. Keďže potrebujeme pridať najviac 3 prvky a k dispozícii máme aspoň 7 prvkov $M - (A \cup B)$, tak je to možné. Množina X je disjunktná s A a s B má spoločných aspoň 7 prvkov. Teda $|X \cup B| \leq 20 - 7 = 13$, čiže podľa predchádzajúceho bodu máme cestu X, Y, B. Celkovo tak dostávame cestu A, X, Y, B.
- $|A \cup B| = 20$: Vtedy A, B sú disjunktné a sú spojené hranou.

V každom prípade sme našli A-B-cestu, dokonca vždy mala táto cesta dĺžku najviac tri.

Podúloha b)

Každý vrchol má stupeň $\binom{16}{10} = 8008$, čo je párne číslo. Keďže G je súvislý a všetky vrcholy má párneho stupňa, tak je eulerovský

Podúloha d)

Graf G nie je bipartitný, nakoľko obsahuje kružnicu nepárnej dĺžky, ktorej vrcholy sú:

1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
2. $\{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$,
3. $\{21, 22, 23, 24, 25, 26, 1, 2, 3, 4\}$,
4. $\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$,
5. $\{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$.