

Cvičenie 12: Pravdepodobnosť

Úloha 1. Finalista v televíznej súťaži má pred sebou troje zatvorených dverí. Za jednými z nich je hlavná výhra – nové auto. Za zvyšnými dvoma dverami sú kozy. Finalista si vyberie jednu dvere. Pre zvýšenie napätia moderátor súťaže, ktorý presne vie, čo sa za jednotlivými dverami skrýva, otvorí jednu zo zvyšných dvoch dverí, za ktorými je koza. Moderátor vie, čo je za ktorými dverami, čiže vždy vie otvoriť dvere tak, že tam je koza. Potom sa obráti na finalistu s ponukou: „Chcete zmeniť svoje rozhodnutie a vybrať si radšej druhé zatvorené dvere?“ Ako by sa mal finalista rozhodnúť.

Úloha 2. Našli ste algoritmus, ktorý pre zadané číslo má zistiť, či je prvočíslo. Keď ho spustíte, tak

- s pravdepodobnosťou 25% odpovie pravdivo **nie**;
- s pravdepodobnosťou 75% odpovie **neviem**.

Je takýto algoritmus použiteľný?

Úloha 3. Koľkokrát musíme pustiť algoritmus z predošlej úlohy na rovnakom vstupe, aby sme mali istotu aspoň 99,99%, že dostaneme správny výsledok?

Úloha 4. Máme algoritmus, ktorý pre zadaný vstup má odpovie **áno** alebo **nie**. V 40% prípadoch dá algoritmus správny výsledok (bez ohľadu na to, čo je správna odpoveď). Vieme s využitím tohto algoritmu zostaviť algoritmus, ktorý odpovie správne s pravdepodobnosťou 90%?

Úloha 5. Alica a Boris sledujú, ako Cecília hádže opakovane mincou. Hra končí, keď Cecília za sebou hodí:

- znak znak hlava – vtedy vyhrá Alica;
- znak hlava znak – vtedy vyhrá Boris.

Aké pravdepodobnosti výhry majú Alica a Boris?

Úloha 6. V triede je n žiakov.

- a) Aká je pravdepodobnosť, že v triede existujú dvaja žiaci narodený v rovnaký deň?
- b) Odhadnite, koľko musí byť žiakov v triede, aby táto pravdepodobnosť bola aspoň $3/4$.
- c) Odhadnite, aká je pravdepodobnosť, že aspoň 10 žiakov bude narodených v rovnaký deň.

Úloha 7. Chceme prevádzkovať hru: zákazník zaplatí poplatok za hru a hodí si kockou. Ak padne 6, tak zákazník vyhráva 10 eur, inak nevyhráva nič. Aký poplatok by ste zvolili pre túto hru?

Úloha 8. Mám dve deti. Prezradím vám, že staršie z nich je dievča. Aká je pravdepodobnosť, že mladšie je tiež dievča?

Úloha 9. Mám dve deti. Prezradím vám, že jedno z nich je dievča. Aká je pravdepodobnosť, že to druhé je tiež dievča?

Úloha 10. Na planéte Zorglub žijú dve rasy obyvateľov: zelení a modrý, pričom každý obyvateľ je buď bohatý alebo chudobný. Štatistiky ukazujú, že náhodne vybraný zelený obyvateľ je s 90% pravdepodobnosťou bohatý. Znamená to, že na planéte Zorglub je sociálna nerovnosť založená na rase?

Úloha 11. Hádžeme opakovane kockou až kým prvýkrát nepadne šestka. Aká je pravdepodobnosť, že musíme hodiť aspoň dva krát? Práve štyri krát? Najviac n krát?

Úloha 12. Vykonajme opakovane náhodný experiment "hádzeme opakovane kockou až kým prvýkrát nepadne šestka" a zakaždým si ako výsledok experimentu zapíšme počet hodov. Ktorá hodnota bude zapísaná najčastejšie? Aká bude očakávaná priemerná zapísaná hodnota?

Úloha 13. Počítačovú sieť tvoria jednotlivé stroje, pričom každý stroj je prepojený s niekoľkými ďalšími pomocou káblov. To môžeme modelovať pomocou grafu, pričom vrcholy grafu reprezentujú stroje a hrany grafu káble. Pri prenose jednotlivého paketu dát z jedného stroja do iného cez priamy kábel dochádza k chybe s pravdepodobnosťou 10^{-6} . Potrebujeme odoslať k paketov dát zo stroja X do stroja Y , pričom najkratšia cesta v grafe z vrchola X do vrchola Y je tvorená ℓ hranami. Aká je pravdepodobnosť, že všetky dáta dorazia bez chyby? (Ak pri prenose nejakého paketu dôjde k viacerým chybám, nie je možné, aby sa tieto navzájom vykompenzovali – raz chybný paket už je navždy chybný.)

Úloha 14. Zaoberajme sa tentoraz len prenosom medzi dvoma zariadeniami. Povedzme, že pravdepodobnosť prenosu signálu bez chyby je 90%. Zavedme nasledovný protokol: Vysielač vyšle tri identické kópie toho istého signálu. Prijímač porovná prijaté signály, a ak sú aspoň dva z nich identické, považuje tento signál sa bezchybný, ak sú všetky tri rôzne, vypýta si vyslanie (troch kópií) signálu znova.

Aká je pravdepodobnosť, že je nutné vypýtať si nové vyslanie signálu?

Aká je pravdepodobnosť, že prijatý signál považujeme za správny, ale v skutočnosti ide o signál s chybou?

Úloha 15. Národná transfúzna služba používa na testovanie prítomnosti vírusu HIV v darovanej krvi dva typy testov: Najprv (lacný a nepresný) test A, a ak výsledok vyjde pozitívny, potom použije (drahší a presnejší) test B.

Test A má tieto vlastnosti: Ak krv obsahuje vírus HIV, s pravdepodobnosťou 99,99% je výsledok pozitívny. Ak krv neobsahuje vírus HIV, výsledok je pozitívny s pravdepodobnosťou 1% (táto falošná pozitivita môže byť spôsobená inými, neškodnými vírusmi ako napríklad vírus nádchy). Inými slovami, test má vysokú spoľahlivosť, ale slabú špecificitu.

Odhadovaná prevalencia výskytu vírusu HIV na Slovensku je 2500 nositeľov z 5 miliónov obyvateľov. Test A darcu D ukázal pozitívny výsledok. Aká je pravdepodobnosť, že darca D je nositeľ vírusu HIV? Má zmysel urobiť znova test A?