1. sada domácich úloh

Termín: **utorok 18. 3. 2025 23:59**

Úloha 1

Nech n je je kladné celé číslo. Na začiatku máme jednu kôpku s n žetónmi. V jednom kroku si vyberieme ľubovoľnú kôpku s aspoň 2 žetónmi a rozdelíme ju na dve neprázdne kôpky, jednu s a žetónmi a druhú s b žetónmi. Za takýto krok získame $a + b$ bodov. Tento krok opakujeme do vtedy, dokým všetky kôpky neobsahujú len jeden žetón. Dokážte, že bez ohľadu na to, aké kroky sme vykonávali, za celý tento proces získame aspoň $3n - 4$ bodov.

Príklad. Na začiatku máme kôpku so 10 žetónmi. V prvom kroku ju rozdelíme napríklad na dve kôpky s 3 a 7 žetónmi, za čo získame $3 + 7 = 10$ bodov. V druhom kroku si vyberieme napríklad kôpku so 7 žetónmi a rozdelíme ju na 2 a 5 žetónov, čím získame $2 + 5 = 7$ bodov.

Tvrdenie dokážeme úplnou matematickou indukciou. Pre jednoduchosť budeme miesto „kôpka s n žetónmi“ písať len „kôpka n“.

Báza.

- Pre $n = 1$ nemôžeme robiť žiadne ťahy, teda získame 0 bodov a platí $0 \geq -1$.
- Pre $n = 2$ musíme kôpku 2 rozdeliť na kôpky 1 a 1, čím získame 2 body a $2 \geq 2$.
- Pre $n = 3$ musíme kôpku 3 rozdeliť na 1 a 2, čím získame 3 body. Potom nám ostáva len rozdeliť 2 na 1 a 1, čo nám dá 2 body. Spolu teda máme $3 + 2 = 5 \geq 5$ bodov.

Indukčný krok. Uvažujme teraz $n \geq 4$.

Predpokladajme, že pre všetky celé k, $1 \leq k < n$ platí, že z kôpky k žetónov dostaneme aspoň $3k - 4$ bodov (IP).

Kôpku s n žetónmi rozdelíme na kôpky veľkostí a, b, pričom $a + b = n$ a $1 \leq a, b < n$. Za tento krok dostaneme $a + b = n$ bodov. Z indukčného predpokladu vieme, že z kôpky a dostaneme aspoň $3a - 4$ bodov a z kôpky b dostaneme aspoň $3b - 4$ bodov. Spolu tak dostaneme aspoň

$$n + (3a - 4) + (3b - 4) = n + 3(a + b) - 8 = n + 3n - 8 = 4n - 8 \qquad \text{bodov.}$$

Keďže $n \geq 4$, tak $4n - 8 \geq 3n - 4$, teda náš získaný počet bodov je aspoň $3n - 4$, čo sme chceli dokázať.

Komentár. Časté chyby alebo nezrovnalosti v riešeniach boli:

- Neoverenie prípadu $n = 1$. Hoci sa to nemusí zdať, pre $n = 1$ je úloha korektne definovaná. Máme kôpku s 1 žetónom. Hráme do vtedy, dokým nemáme len jednožetónové kôpky – to znamenám, že robíme 0 ťahov. Získame teda v každom prípade 0 bodov. Máme dokázať, že $0 \geq -1$, čo platí.
- Definovanie hodnoty $S(n)$ ako počet bodov pre kôpku s n žetónmi. Počet získaných bodov nezávisí len od n, ale aj od ťahov, ktoré robíme. Napr. pre $n = 4$ vieme získať aj 8, aj 9 bodov.

- Dokazovanie pre $n = k + 1$ (alebo pre $n + 1$). Toto nie je chyba. Chceme len poukázať na to, že pri tejto úlohe nám „+1“ v dôkaze nijako nepomôže a skôr nám bude len zavadzať. Okrem toho však môže spôsobiť chybu z nasledovného bodu.

- Zabudnutie overenie prípadu $n = 3$. Väčšina riešení s touto chybou dokazovala v indukčnom kroku tvrdenie pre $n + 1$. Ak takýto indukčný krok platí pre $n \geq 3$, tak to znamená, že v ňom máme dokázané (ak platí indukčný predpoklad) tvrdenie pre $4, 5, 6, \ldots$, lebo ak $n \geq 3$, tak $n + 1 \geq 4$. Dôkaz pre $n = 3$ potrebujeme spraviť zvlášť v báze.

Iné riešenie

Uvedieme ešte riešenie bez matematickej indukcie, na ktoré prišiel *Pavlii Maksym*.

Na začiatku procesu máme 1 kôpku. Jedným krokom zväčšíme počet kôpok o 1. Na konci dostaneme n kôpok. Preto za celý proces musíme vykonať $n-1$ krokov. Za rozdelenie kôpky s k žetónmi dostaneme k bodov. V prvom kroku teda získame n bodov. V každom ďalšom z $n - 2$ krokov delíme kôpku s aspoň dvomi žetónmi, teda získame aspoň 2 body. Celkovo tak získame aspoň

$$n + (n - 2) \cdot 2 = 3n - 4$$

bodov, ako sme mali dokázať.

Úloha 2

Nájdite najmenšie také číslo k pre ktoré platí, že v každej k-prvkovej podmnožine množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$ sa nachádzajú tri čísla, ktoré majú spoločnú cifru (spoločná cifra musí byť rovnaká pre všetky tri, ale môže v nich byť na rôznych pozíciách, napr. čísla 12, 31 a 17 majú spoločnú cifru 1, ale čísla 42, 47 a 27 nemajú spoločnú cifru). Vaše tvrdenie dokážte.

Ukážeme, že najmenšie hľadané číslo je 19.

Dolný odhad . Ak vyberieme 18-prvkovú podmnožinu

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\},$$

tak ľahko overíme, že v nej nie sú tri čísla s rovnakou cifrou. Preto musíme vybrať aspoň 19 čísel.

Horný odhad Nech M je ľubovoľná 19-prvková podmnožina množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$. Množinu M rozložíme na množiny M_i pre $i \in \{1, 2, \ldots, i\}$ tak, že množina M_i bude obsahovať práve tie čísla z M, ktoré sa začínajú cifrou i. Keďže sa žiadne z čísel nezačína nulou, tak ide o rozklad množiny M. Nakoľko $19/9 > 2$, tak z frekvenčnej formy Dirichletovho princípu vyplýva, že niektoré množina M_i obsahuje aspoň tri čísla, a tie majú spoločnú cifru, dokonca prvú cifru.

Úloha 3

Okolo okrúhleho stola je usadených n komikov, ktorí sú v smere hodinových ručičiek očíslovaní $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Teda komici 0 a $n-1$ sedia vedľa seba. Komici si postupne rozprávajú vtipy. Za postup rozprávania vtipov považujeme postupnosť komikov, teda čísel z množiny $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Koľkými spôsobmi môžu rozprávať vtipy, ak

a) *(0,2 b)* celkovo odznejú práve 3 vtipy (teda chceme postupnosti dĺžky 3);

b) *(0,6 b)* celkovo odznie práve 5 vtipov, pričom komici sediaci vedľa seba nesmú povedať vtip bezprostredne za sebou (napr. postupnosť $(1, 3, 5, 2, 5)$ vyhovuje týmto podmienkam, ale postupnosť $(1, 2, 4, 6, 3)$ nevyhovuje);

c) *(0,7 b)* $n = 6$, celkom odznie práve 7 vtipov a každý komik povie aspoň jeden vtip.

Vaše výsledky **formálne** dokážte.

Nech $M = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Sčítavanie a odčítavanie prvkov z M budeme robiť ako v grupe $(\mathbb{Z}_n, +)$. Postupnosť dĺžku k budeme pokladať za usporiadanú k-ticu.

a) Ide o postupnosti z množiny $M \times M \times M$, ktorej mohutnosť je podľa pravidla súčinu $|M| \cdot |M| \cdot |M| = n^3$.

b) Pre $n = 0$ je $M = \emptyset$, takže neexistuje žiadna pätica. Pre $n = 1$ je jedinou päticou $(0, 0, 0, 0, 0)$, ktorá vyhovuje. Pre $n = 2$ nemôžu byť vedľa seba 0 a 1, preto jediné pätice sú $(0, 0, 0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1, 1, 1)$. Pre $n \geq 3$ Hľadáme počet takých postupností $(a, b, c, d, e) \in M^5$, že:

- $a \in M$, pričom $|M| = 5$;
- $b \in M - \{a-1, a+1\}$, vždy $n-2$ možností na výber (keďže $n \geq 3$, tak $a - 1 \neq a + 1$);
- $c \in M - \{b-1, b+1\}$, vždy $n-2$ možností na výber;
- $d \in M - \{c-1, c+1\}$, vždy $n-2$ možností na výber;
- $e \in M - \{d-1, d+1\}$, vždy $n-2$ možností na výber.

Preto podľa zovšeobecného pravilda súčinu takýchto 5-tíc je $n \cdot (n-2)^4$.

Poznámka Riešenie úlohy pre prípad $n \leq 2$ sme nakoniec nevyžadovali, ale pokiaľ ste tieto prípady pokryli, tak sme ich ohodnotili 0,2 bodmi.

c) Spoločná časť V tejto úlohe $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Hľadáme počet prvkov množiny A obsahujúcej všetky usporiadané sedmice prvkov z M, ktoré obsahujú každý prvok z M aspoň raz. V každej takejto sedmici sa nachádza jeden prvok dvakrát a zvyšné len raz.

c) Riešenie rozdelením na permutácie s opakovaním. Rozdelíme si množinu A na množiny A_i pre $i \in M$ tak, že množina A_i obsahuje práve tie sedmice z množiny A, ktoré obsahujú dva výskyty prvku i. To znamená, že každá sedmica z A_i v nejakom poradí obsahuje prvky $0, 1, 2, 3, 4, 5, i$. Je to

teda množina permutácií s opakovaním obsahujúca 2-krát prvok i a zo zvyšných prvkov z $M - \{i\}$ po jedenkrát. Podľa vety o permutáciách s opakovaním tak platí

$$|A_i| = \frac{7!}{2!}.$$

Použitím pravidla súčtu tak dostávame

$$|A| = |A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_5| = |A_0| + |A_1| + \cdots + |A_5| = 6 \cdot \frac{7!}{2}.$$

c) Riešenie s pravidlom delenia Najprv uvedieme toto riešenie neformálne. Najprv zvolíme poradie, v ktorom každý komik povie jeden vtip: 6! možností. Potom si zvolíme komika, ktorý zopakuje vtip: 6 možností; a pridáme ho do nášho poradie, na čo máme 7 možných miest. Na tieto voľby máme $6! \cdot 6 \cdot 7$ možností. Avšak každú sedmicu započítame dvakrát – Preto ešte predelíme dvomi.

Nech B je množina usporiadaných trojíc $((b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5), a, i)$, kde

- $(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ je permutácia množiny M: 6! možností;
- $a \in M$: 6 možností;
- $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu $|B| = 6! \cdot 6 \cdot 7 = 6 \cdot 7!$.

Nech $f\colon B \to A$ je zobrazenie, ktoré trojici $((b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5), a, i)$ priradí usporiadanú sedmicu, ktorá vznikne vložením prvku a pred prvok b_0, resp. za prvok b_5 pre $i = 6$. To, že ide o zobrazenie do množiny A je zjavné. Teraz určíme, koľko prvkov množiny B sa zobrazí na nejaký fixný prvok $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \in A$:

- Sedmica $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ obsahuje práve jeden prvok dvakrát, nech to sú $a_x = a_y$. Preto a musí byť rovné tomuto prvku. Je teda určené jednoznačne
- i môže byť x alebo y, na čo máme 2 možnosti.
- $(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ musí byť 6-tica, ktorú dostaneme po vynechaní a_i, teda je jednoznačne určená.

Dostávame, že každý prvok z A má dva vzory. Preto podľa pravidla delenia

$$|A| = \frac{|B|}{2} = \frac{6 \cdot 7!}{2}.$$

c) Riešenie podľa pozície zopakovania komika Množinu A si rozložíme na množiny A_i pre $i\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tak, že A_i obsahuje všetky sedmice z A, v ktorých sa na pozícii i zopakuje číslo (číslujeme od 0). Toto opakovanie je jediné, čiže ide naozaj o rozklad. Množina A_i obsahuje také usporiadané sedmice $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$, že

- Ak $j < i$, tak $a_j \in M - \{a_0, \ldots, a_{j-1}\}$, na čo máme $6 - j$ možností
- $a_i \in \{a_0, \ldots, a_{i-1}\}$
- Ak $j > i$, tak $a_j \in M - \{a_0, \ldots, a_{j-1}\}$, čo je množina s veľkosťou $6-(j-1)$, keďže $|\{a_0, \ldots, a_{j-1}\}| = j - 1$, lebo medzi j prvkami $a_0, \ldots, a_{j-1}$ sa jeden opakuje dvakrát.

Preto podľa zovšeobecneného pravidla súčinu dostávame:

- $|A_1| = 6 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 6!$,
- $|A_2| = 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 6!$,
- $|A_3| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 6!$,
- $|A_4| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \cdot 6!$,
- $|A_5| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 = 5 \cdot 6!$,
- $|A_6| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 = 6 \cdot 6!$.

Využitím pravidla súčtu a vzorca pre súčet prvých n prirodzených čísel dostávame

$$|A| = |A_1 \cup \cdots \cup A_6| = |A_1| + \cdots + |A_6| = (1+2+3+4+5+6) \cdot 6! = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 6!.$$

c) Riešenie cez zovšeobecnené pravidlo súčinu. Nech A je množina usporiadaných trojíc $(a, \{i,j\}, (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4))$ takých, že

- $a \in M$: 6 možností (vyberáme komika, ktorý povie vtip dvakrát);
- $\{i,j\} \in \binom{\{0,1,2,3,4,5,6\}}{2}$: $\binom{7}{2}$ možností (vyberáme pozície, na ktorých sa bude tento komik nachádzať);
- $(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4)$ je permutácia prvkov množiny $M - \{a\}$: $|M - \{a\}|! = 5!$ možností podľa vety o počte permutácií (vyberáme poradie zvyšných piatich komikov).

Podľa zovšeobecného pravidla súčinu $|A| = 6 \cdot \binom{7}{2} \cdot 5!$.

Hľadáme počet prvkov množiny B obsahujúcej všetky usporiadané 7-mice prvkov z M, ktoré obsahujú každý prvok z M aspoň raz. Definujme zobrazenie $f\colon A \to B$, ktoré zobrazí trojicu $(a, \{i,j\}, (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4))$ na 7-icu $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)$ takú, že $c_i = c_j = a$ a podpostupnosť