

2. sada domácich úloh

Úloha 1

(3 body) Nech $F = \{A, B, C, D\}$ je množina farieb a $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ je množina hodnôt. Pod *kartou* rozumieme ľubovoľnú usporiadanú dvojicu z $F \times H$. Určte, koľko je všetkých 6-prvkových postupností kariet, v ktorých sa karty neopakujú a

- a) (0,5 b) ktorých všetky karty majú rovnakú hodnotu;
- b) (1,5 b) ktoré obsahujú tri rôzne hodnoty, z každej hodnoty práve dve karty;
- c) (1 b) ktorých hodnoty tvoria rastúcu postupnosť.

Výsledky zdôvodnite (stačí neformálne).

a) Keďže všetky karty majú mať rovnakú hodnotu a máme k dispozícii len 4 rôzne farby, nevieme vytvoriť viac ako 4 rôzne karty. Preto takáto postupnosť neexistuje, teda je ich 0.

b) Najskôr spočítame všetky takéto 6-prvkové množiny kariet. Na výber troch rôznych hodnôt pre týchto 6 kariet máme $\binom{9}{6}$ možností a pre každú z týchto troch hodnôt máme $\binom{4}{2}$ možností na výber farieb. To nám dáva $\binom{9}{6} \binom{4}{2}^3$ hľadaných 6-prvkových podmnožín. Prvky každej z nich vieme do postupnosti zoradiť 6! spôsobmi, teda výsledný počet možností je

$$\binom{9}{6} \binom{4}{2}^3 \cdot 6!.$$

Tomuto riešeniu priamočiaro zodpovedá nasledovný program.

```
from itertools import combinations, permutations
import sys

F = 'ABCD'
H = [str(x) for x in range(9)]

for x, y, z in combinations(H, 3):
    for a, b in combinations(F, 2):
        for c, d in combinations(F, 2):
            for e, f in combinations(F, 2):
                mnoz = [a+x, b+x, c+y, d+y, e+z, f+z]
                for p in permutations(range(6)):
                    vysl = [mnoz[x] for x in p]
                    sys.stdout.write(' '.join(vysl) + '\n')
```

c) Prvky rastúcej postupnosti hodnôt sú navzájom rôzne, preto samotnú množinu 6 hodnôt vieme vybrať $\binom{9}{6}$ spôsobmi. Navyše, každú z týchto 6-prvkových podmnožín možno jediným spôsobom zoradiť do rastúcej postupnosti. Pre každú zo 6 hodnôt máme ešte 4 možnosti na výber farieb. Spolu tak máme

$$\binom{9}{6} \cdot 4^6 \quad \text{možností.}$$

```

from itertools import combinations, product

F = 'ABCD'
H = [str(x) for x in range(1, 9)]

for h in combinations(H, 6):
    for f in product(F, repeat=6):
        print(*[h[i] + f[i] for i in range(6)])

```

Pokiaľ máte záujem o doplnenie programov v C++, tak mi napíšte a viem ich časom doplniť.

Úloha 2

Pomocou počítania dvomi spôsobmi (kombinatoricky) dokážte, že pre každé prirodzené čísla a , n platí

$$(a+1)^n - a^n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k (a+1)^{n-k-1}.$$

Zadanie úlohy. Uvažujme úlohu: Koľko existuje n -prvkových postupností čísel z množiny $\{0, 1, \dots, a\}$, ktoré obsahujú aspoň jednu nulu.

Prvé riešenie (ľavá strana). Všetkých postupností prvkov z množiny $\{0, 1, \dots, a\}$ je $(a+1)^n$, keďže na každé z n miest máme $a+1$ možností. Od nich odpočítame tie, ktoré neobsahujú 0, ktorých je a^n . Teda riešením tejto úlohy je

$$(a+1)^n - a^n.$$

Druhé riešenie (pravá strana). Všetky hľadané postupnosti rozdelíme do množín M_k pre $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, kde M_k obsahuje tie postupnosti, v ktorých sa prvá 0 nachádza na pozícii $k+1$ (čísľujúc od 0). Pre výber postupností z M_k máme

- a možností na každé z prvých k miest (vyberáme z $\{1, 2, \dots, n\}$);
- 1 možnosť na miesto $k+1$ – tam musí byť 0;
- $a+1$ možností na každé zo zvyšných $n-k-1$ miest (vyberáme z $\{0, 1, \dots, n\}$).

Preto $|M_k| = a^k (a+1)^{n-k-1}$. Keďže M_k zjavne tvoria rozklad množiny všetkých hľadaných postupností, tak ich počet je

$$\sum_{k=0}^{n-1} |M_k| = \sum_{k=0}^{n-1} a^k (a+1)^{n-k-1}.$$

Vyriešili sme tak tú istú úlohu dvomi spôsobmi. Preto sa získané výsledky rovnajú, čo sme chceli dokázať.

Úloha 3

V závislosti od prirodzeného čísla n vypočítajte sumu

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-5)^k}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k}.$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \frac{(-5)^k}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-5)^k}{(k+1)(k+2)} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \\ &= \sum_{k=0}^n (-5)^k \frac{n!}{(k+2)!(n-k)!} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \sum_{k=0}^n (-5)^k \frac{(n+2)!}{(k+2)!(n-k)!} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^n (-5)^k \binom{n+2}{k+2} = \frac{1}{(-5)^2(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^n (-5)^{k+2} \binom{n+2}{k+2} = \\ &= \frac{1}{25(n+1)(n+2)} \sum_{\ell=2}^{n+2} (-5)^\ell \binom{n+2}{\ell} \stackrel{\text{BV}}{=} \\ &= \frac{1}{25(n+1)(n+2)} \left((1-5)^{n+2} - (-5)^0 \binom{n+2}{0} - 25 \binom{n+2}{1} \right) = \\ &= \frac{(-4)^{n+2} - 1 + 5(n+2)}{25(n+1)(n+2)} = \frac{(-4)^{n+2} + 5n + 9}{25(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$