

3. sada domácich úloh

Termín: utorok 20. 5. 2025 23:59

Špeciálne pokyny: Pokiaľ odovzdávate program ako bonus, odovzdajte ho v samostatnom súbore. Všetko ostatné nech stále je v jednom pdf súbore.

Úloha 1. (3 body) Koľko existuje neklesajúcich postupností dĺžky 200 pozostávajúcich z prvkov množiny $\{1, \dots, 100\}$, ktoré každé z čísel $1, 2, \dots, 100$ obsahujú najviac 30-krát? Výsledok môžete uviesť v tvare jednej sumy. Vaše tvrdenie dokažte.

Úloha 2. (2,5 boda) Nech $f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ je zobrazenie s predpisom $f(n) = \frac{1}{6\sqrt{n}} + \frac{10}{n}$. Rozhodnite, či platí

a) $f(n) = \Theta(\frac{1}{n})$, b) $f(n) = \Theta(\frac{1}{\sqrt{n}})$, c) $f(n) = o(1)$.

d) Nájdite také konštanty $a, b \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí $f(n) \sim an^b$.

Vaše tvrdenia poriadne dokažte (v d) nemusíte dokazovať, že iné konštanty neexistujú). Pri dôkazoch vychádzajte len z definícií, bez odvolávania sa tvrdenia o asymptotických odhadoch.

Úloha 3. (3 body) Nech G je súvislý 3-regulárny graf. Dokažte, že graf G má takú kosť T , že každá kružnica grafu G má s kosťou T aspoň jednu spoločnú hranu.

Bonus. (cca 2 body) Napíšte algoritmus, ktorý načíta zo štandardného vstupu graf a vypíše na štandardný výstup jeho kosť s požadovanou vlastnosťou.

Formát vstupu. V prvom riadku sa nachádza kladné celé číslo n predstavujúce počet vrcholov grafu, ktoré číslujeme $0, 1, \dots, n-1$. Nasleduje n riadkov, ktoré postupne predstavujú susedov vrcholov $0, 1, \dots, n-1$. Každý z týchto n riadkov obsahuje tri medzerou oddelené čísla vrcholov, s ktorými je príslušný vrchol spojený.

Formát výstupu. Na výstup vypíšte hrany kosti, každú do samostatného riadku ako dve medzerou oddelené čísla, ktoré predstavujú čísla vrcholov, ktoré spája.

Hodnotenie. V prvom rade je dôležitá správnosť vášho programu, ktorá musí byť zdôvodnená (komentarími v kóde alebo v pdf s riešeniami ostatných úloh). Dĺžka takéhoto zdôvodnenia silno závisí od zvoleného algoritmu. Existujú programy, ktorým stačí veľmi krátke zdôvodnenie. V druhom rade je dôležitá efektívnosť programu. Veľmi efektívne programy môžu byť ocenené aj viac ako 2 bodmi.

Formát vstupu a výstupu je potrebné striktné dodržať! Teda nevypisujte ani veci „Zadajte n:“, „Odpoveď je“, nenačítavajte vstup zo súboru a podobné veci.

Príklad vstupu:

```
8
1 3 4
0 2 5
1 3 6
2 0 7
0 7 5
1 4 6
2 5 7
3 6 4
```

Príklad výstupu:

```
0 1
0 3
0 4
3 2
3 7
7 6
6 5
```