4. sada domácich úloh

Termín: **nedeľa 24. 5. 2026 23:59**

(2 body) Dokážte, že pre každé kladné celé číslo n platí, že každý graf s $2n$ vrcholmi bez kružnice dĺžky 3 má počet hrán menší alebo rovný n^2.

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa n. Pre $n = 1$ graf s $2n = 2$ vrcholmi môže obsahovať najviac 1 hranu, teda najviac n^2 hrán.

Predpokladajme, že ľubovoľný graf s $2n$ vrcholmi bez trojuholníka má najviac n^2 hrán. Uvažujme teraz graf s $2n + 2$ vrcholmi. Ak nemá žiadnu hranu, tak sme hotoví. Inak uvažujme jeho hranu uv. Nech G' je graf, ktorý vznikne z grafu G po odstránení vrcholov u, v. Keďže G' má $2n$ vrcholov, tak z indukčného predpokladu má najviac n^2 hrán. Vrcholy u a v nemôžu mať spoločného suseda – to by vytvorilo trojuholník. Preto majú spolu najviac $2n$ susedov. Graf G má teda najviac n^2 hrán v grafe G', najviac $2n$ hrán medzi u, v a grafom G' a potom hranu uv. To je celom najviac

$$n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

hrán, čo sme chceli dokázať.