

Sada domáčich úloh z UKTG č. 2

Termín: streda 10. 4. 2023, 23:59

Úloha 1. (1,5 boda) V závislosti od prirodzeného čísla n vypočítajte sumu

$$\sum_{k=0}^n k(n-k) \binom{2n}{k} \binom{3n}{n-k}.$$

Úloha 2. (1,5 boda) Určte, kolko existuje usporiadaných 20-tíc $(a_1, a_2, \dots, a_{20})$ celých čísel, ktoré splňajú všetky z nasledovných podmienok:

- (i) $a_i \geq 2$ pre každé $i \in \{1, 2, \dots, 20\}$,
- (ii) $a_1 \leq 4$,
- (iii) $a_2 = 10$,
- (iv) $a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = 300$.

Úloha 3. (4 body) V tejto úlohe budeme pracovať s kartičkami inšpirovanými hrou Dobble. Na každej karte sa nachádza 8 symbolov z celkových možných 57 symbolov. Symboly budeme reprezentovať prirodzenými číslami.



Obr. 1: Ukážka hry Dobble (Zdroj: <https://www.ihrysko.sk/dobble-p4835#lg=2&slide=2>)

Nech teda $Z = \{1, 2, \dots, 57\}$ je množina symbolov. *Dobble kartička*, alebo skrátene len *kartička*, je ľubovoľná 8-prvková podmnožina množiny Z . Určte, kolko je

- a) (0,2 boda) všetkých možných kartičiek (upozorňujeme, že podľa našej definície je možných kartičiek výrazne viac ako kartičiek použitých v jednej sade);
- b) (0,8 boda) usporiadaných dvojíc kartičiek, ktoré nemajú žiadnen spoločný symbol (napr. $(\{2, 5, 9, 17, 42, 47, 50, 52\}, \{7, 12, 24, 30, 31, 37, 49, 55\})$);
- c) (1,5 bod) 4-prvkových množín kartičiek, ktorých zjednotenie tvorí 32 za sebou idúcich čísel (napr. $\{\{14, 20, 22, 25, 27, 31, 34, 36\}, \{8, 9, 13, 15, 30, 32, 35, 37\}, \{10, 12, 16, 18, 19, 21, 24, 28\}, \{7, 11, 17, 23, 26, 29, 33, 38\}\}$)
- d) (1,5 boda) 3-prvkových množín kartičiek, kde každé dve kartičky majú práve jeden spoločný symbol (nie nutne ten istý);

Vaše výsledky dokážte.

Bonus. (1 bod) Hra Dobble sa však nehrá len tak s hocjakou sadou kartičiek. *Dobble sada* je množina kartičiek taká, že každé dve rôzne kartičky majú práve jeden spoločný symbol a zároveň neexistuje

symbol, ktorý by bol na všetkých kartičkách (ak by taký existoval, tak hra ani táto úloha by neboli zaujímavé). Koľko najviac kartičiek môže obsahovať nejaká Dobble sada? Vaše tvrdenie dokážte.

Pri dôkaze môžete použiť aj počítač, vtedy odovzdajte použité programy. Ako pomôcku uvádzame, že v hre Dobble je 55 kartičiek, ktoré nájdete v súbore <http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~rajnik/uktg/du/dobble.txt> (každý riadok je jedna kartička, kde sú jej symboly oddelené medzerami). Väčšina bodov bude udelená za horný odhad počtu kartičiek. Tak aj keď neviete nájsť príklad optimálnej sady, nemusíte zúfat.