

Oficiálny ťahák (Kombinatorická analýza)

Metóda sumačných faktorov

Riešime rekurenciu

$$T_0 = \langle \text{hocičo} \rangle;$$

$$a_n T_n = b_n T_{n-1} + c_n; \quad n \geq 1$$

Sumačný faktor:

$$s_n = \frac{a_{n-1} a_{n-2} \cdot \dots \cdot a_1}{b_n b_{n-1} \cdot \dots \cdot b_2} \cdot s_1,$$

kde s_1 môže byť ľubovoľná konštanta $\neq 0$. Potom:

$$T_n = \frac{1}{a_n s_n} \left[s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^n s_k c_k \right].$$

Konečný kalkul

Operátor diferencie:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

Klesajúca faktoriálna mocnina:

$$x^0 = 1$$

$$x^m = x(x-1) \cdot \dots \cdot (x-m+1), \quad m \geq 1;$$

$$x^{-m} = \frac{1}{(x+1) \cdot \dots \cdot (x+m)}, \quad m > 0;$$

Diferencie niektorých funkcií:

$$\Delta x^m = m \cdot x^{m-1}$$

$$\Delta c^x = (c-1) \cdot c^x$$

$$\Delta H_x = \frac{1}{x+1}$$

$$\Delta F_x = F_{x-1}$$

Určitá suma (nech $\Delta f(x) = g(x)$):

$$\sum_{k=a}^{b-1} g(k) = \sum_a^b g(x) \delta x = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$$

Sumácia per-partes:

$$\sum u \Delta v = uv - \sum Ev \Delta u,$$

kde E je operátor posunu: $Ef(x) = f(x+1)$.

Dolné a horné celé časti

Základné vlastnosti ($x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}$):

$$x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x+1$$

$$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1$$

$$\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow x-1 < n \leq x$$

$$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n-1 < x \leq n$$

$$\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow x \leq n < x+1$$

$$\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$

$$\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$$

Ďalšie vlastnosti:

$$x < n \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor < n$$

$$n < x \Leftrightarrow n < \lceil x \rceil$$

$$x \leq n \Leftrightarrow \lceil x \rceil \leq n$$

$$n \leq x \Leftrightarrow n \leq \lfloor x \rfloor$$

Počet celých čísel v intervale:

$$\langle \alpha, \beta \rangle : \lceil \beta \rceil - \lfloor \alpha \rfloor \quad \alpha \leq \beta$$

$$(\alpha, \beta) : \lfloor \beta \rfloor - \lfloor \alpha \rfloor \quad \alpha \leq \beta$$

$$(\alpha, \beta) : \lceil \beta \rceil - \lfloor \alpha \rfloor - 1 \quad \alpha < \beta$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle : \lfloor \beta \rfloor - \lceil \alpha \rceil + 1 \quad \alpha \leq \beta$$