Oficiálny ťahák II (Kombinatorická analýza)

Binomické koeficienty

Vo všetkých nasledujúcich identitách označujú n, k a m celé čísla; r a s označujú reálne čísla.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad n \geq k \geq 0$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad n \geq 0$$

$$\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}, \qquad k \neq 0$$

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k-1} + \binom{r-1}{k},$$

$$\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k},$$

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k},$$

$$\sum_k \binom{r}{k} x^k y^{r-k} = (x+y)^r,$$

$$r \text{ je celé, alebo } |x/y| < 1$$

$$\sum_{k \leq n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n},$$

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}, \qquad m, n \geq 0$$

$$\sum_k \binom{r}{m+k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n}.$$

Vytvárajúce funkcie

Prehľad základných postupností a k nim prislúchajúcich vytvárajúcich funkcií, vrátane uzavretého tvaru.

$$\langle 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle \quad \to \sum_{n \geq 0} z^n$$
$$\to \frac{1}{1-z}$$

$$\langle 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots \rangle \quad \to \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^n$$
$$\to \frac{1}{1+z}$$

$$\langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots \rangle \quad \to \sum_{n \geq 0} z^{2n}$$
$$\to \frac{1}{1-z^2}$$

$$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots \rangle \quad \to \sum_{n \geq 0} (n+1) z^n$$
$$\to \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$\langle 1, c, \tbinom{c}{2}, \tbinom{c}{3}, \tbinom{c}{4}, \ldots \rangle \quad \to \sum_{n \geq 0} \binom{c}{n} z^n$$
$$\to (1+z)^c$$

$$\langle 1, c, \tbinom{c+1}{2}, \tbinom{c+2}{3}, \tbinom{c+3}{4}, \ldots \rangle \quad \to \sum_{n \geq 0} \binom{c+n-1}{n} z^n$$
$$\to \frac{1}{(1-z)^c}$$

$$\langle 1, c, c^2, c^3, c^4, \ldots \rangle \quad \to \sum_{n \geq 0} c^n z^n$$
$$\to \frac{1}{(1-cz)}$$

$$\langle 0, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots \rangle \quad \to \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^n$$
$$\to \ln \frac{1}{1-z}$$

$$\langle 0, 1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{4}, \ldots \rangle \quad \to \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$
$$\to \ln(1+z)$$