

Úlohy na precvičenie z predikátovej logiky

Pre riešenie dôkaz tvrdenia s číslom n môžete predpokladať platnosť tvrdení s menším číslom. Nezabudnite, že veta o dedukcii, sa musí používať opatrnejšie ako vo výrokovej logike. Tiež môžete používať dokázané tvrdenia z výrokovej logiky. Príklad číslo 7 je ťažký, nebojte sa ho.

1. Dokážte, že ak $\vdash A \rightarrow B$ tak $\vdash A \rightarrow (\forall x)B$ za predpokladu, že x nie je voľná v A
2. Dokážte, že ak $\vdash A \rightarrow B$ tak $\vdash (\exists x)A \rightarrow B$ za predpokladu, že x nie je voľná v B
3. $\vdash (\forall x)(\forall y)A(x, y) \rightarrow (\forall y)(\forall x)A(x, y)$
4. $\vdash ((\forall x)A(x)) \rightarrow ((\forall y)A(y))$, kde y je term substituoateľný¹ za x do $A(x)$.
5. $\vdash (\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow ((\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x))$
6. $\vdash (A \rightarrow (\forall x)B) \rightarrow (\forall x)(A \rightarrow B(x))$, kde x nie je voľná v A
7. $\vdash (\exists x)(A \rightarrow B) \rightarrow ((\forall x)A \rightarrow (\exists x)B)$
8. $\vdash (\exists x)(A \rightarrow B(x)) \rightarrow (A \rightarrow (\exists x)B(x))$, kde x nie je voľná v A
9. $\vdash (\exists x)(A(x) \rightarrow B) \rightarrow ((\forall x)A(x) \rightarrow B)$, kde x nie je voľná v B
10. $\vdash ((\forall x)A \rightarrow (\exists x)B) \rightarrow (\exists x)(A \rightarrow B)$
11. $\vdash ((\forall x)A(x) \rightarrow B) \rightarrow (\exists x)(A(x) \rightarrow B)$, kde x nie je voľná v B
12. $\vdash (A(x) \rightarrow (\exists x)B) \rightarrow (\exists x)(A(x) \rightarrow B(x))$, kde x nie je voľná v A
13. $\vdash (\forall x)A(x) \rightarrow (\exists x)A(x)$
14. $\vdash (\forall x)(A \rightarrow B) \rightarrow ((\exists x)A \rightarrow (\exists x)B)$

¹To znamená, že y nemá v $A(x)$ žiaden viazaný výskyt. Inými slovami, že y nie je nikde v $A(x)$ kvantifikované