

## Ukážka dôkazu

*Úloha:* Dokážte  $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$   
Najprv si  $\wedge$  prepíšeme do implikácií a negácií. Vieme, že

$$\neg(A \rightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B)$$

A teda po krátkom zamyslení si môžeme uvedomiť, že

$$(A \wedge B) \equiv \neg(A \rightarrow \neg B)$$

Teraz si môžeme tvrdenie ktoré chceme dokázať prepísať do požadovaného tvaru.

$$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow (\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C)$$

Tiež musíme rozbiť ekvivalenciu. Tu využijeme vetu z prednášky ktorá hovorí, že  $\vdash A \leftrightarrow B$  práve vtedy keď  $\vdash A \rightarrow B$  a  $\vdash B \rightarrow A$ . Máme teda vlastne dva "príklady":

a)  $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C)$

b)  $\vdash (\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$

Najprv dokážeme a). Dokazované tvrdenie môžeme *ekvivalentnými úpravami* premeniť na jednoduchšie tvrdenie. Tým myslím na také úpravy, ktoré budeme vedieť previesť aj opačným smerom. Teda ak dokážeme spomínané jednoduchšie tvrdenie, tak na základe týchto úprav budeme vedieť z neho dostať dôkaz pôvodného tvrdenia.

$$\begin{aligned} & \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C) \\ A \rightarrow (B \rightarrow C) & \vdash \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C \\ A \rightarrow (B \rightarrow C) & \vdash \neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \\ A \rightarrow (B \rightarrow C), \neg C & \vdash A \rightarrow \neg B \\ A \rightarrow (B \rightarrow C), \neg C, A & \vdash \neg B \end{aligned}$$

Komentár k úpravám: najprv sme použili vetu o dedukcii. Potom sme použili obmenu (variant axiomy 3. Pozor, nie je to axioma ani jedna z Postovych teorém, ale dokázali sme si ju na cvikách. Nájdete ju tiež v českých skriptách na strane 38, Implikácie, úlohy *d* a *e*). Potom opäť dedukciu.

Posledné tvrdenie vyzerá už dokázateľnejšie. Keď sa poriadne prizrieme, tak vidíme, že pre jeho dokázanie bude treba už len niekoľko krát použiť Modus Ponens a jemne počuť. Poďme ho teda teraz poriadne dokázať.

$$A \rightarrow (B \rightarrow C), \neg C, A \vdash A \tag{1}$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow C), \neg C, A \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C) \tag{2}$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow C), \neg C, A \vdash B \rightarrow C \tag{3}$$

$$\vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg B) \tag{4}$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow C), \neg C, A \vdash \neg C \rightarrow \neg B \tag{5}$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow C), \neg C, A \vdash \neg C \tag{6}$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow C), \neg C, A \vdash \neg B \tag{7}$$

Komentár k úpravám: kroky (1), (2) a (6) sú len prepísanie jedného z predpokladov medzi dokázané tvrdenia. (4) je jedna z Postovych teorém. Ďalej sme použili Modus Ponens na už dokázané tvrdenia (alebo tvrdenia, o ktorých už vieme, že sú dokázateľné).

Dôkaz dorazíme tým, že z tejto medzizastávky dokážeme pôvodné tvrdenie (opačným postupom, ako sme sa dostali z pôvodného tvrdenia sem).

$$A \rightarrow (B \rightarrow C), \neg C \vdash A \rightarrow \neg B \quad (8)$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash \neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \quad (9)$$

$$\vdash (\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C) \quad (10)$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C \quad (11)$$

$$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C) \quad (12)$$

Komentár k úpravám: (8), (9) a (12) je vždy použitá veta o dedukcii, (10) je obmena dokázaná na cvičení, (11) je Modus Ponens.

Vrhnime sa na teraz opačnú implikáciu (príklad b). Dôkaz bude obdobný, niektoré kroky ako viacnásobné použite vety o dedukcii, alebo použite modus ponens na axiomu alebo teorému spojíme do jedného kroku. Začneme zjednodušovaním dokazovaného tvrdenia.

$$\vdash (\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

$$\vdash (\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

Všimnime si, že ak použijeme vetu o dedukcii, tak spodný riadok bude použiteľnejší, pretože pred ním nie je žiadna škaredá negácia, ktorá nám zabraňuje použiť Modus Ponens na implikáciu za ňou.

Obmenu v predpokladoch však nemôžeme urobiť len tak (nemáme na to pravidlo ani vetu). Môžeme však dokázať  $\vdash (\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B))$  a  $\vdash (\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ . Keď budeme mať dokázané tieto dve tvrdenia, ľahko z nich dostaneme požadované. Všimnime si, že z pohľadu bežnej matematiky možno tieto dve tvrdenia chápať ako lemy – pomocné tvrdenia. Ďalším upravovaním dostaneme

$$\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B), A \vdash B \rightarrow C$$

$$\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B), A \vdash \neg C \rightarrow \neg B$$

$$\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B), A, \neg C \vdash \neg B$$

Komentár: Obmenu sme použili preto, že v predpokladoch máme tvrdenie, ktorého predpoklad je  $\neg C$  a takto môžeme naň bez problémov použiť modus ponens.

Podme teda urobiť poriadny dôkaz.

$$\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B), A, \neg C \vdash A \rightarrow \neg B \quad (1)$$

$$\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B), A, \neg C \vdash \neg B \quad (2)$$

$$\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B), A \vdash \neg C \rightarrow \neg B \quad (3)$$

$$\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B), A \vdash B \rightarrow C \quad (4)$$

$$\vdash (\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \quad (5)$$

$$\vdash (\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B)) \quad (6)$$

$$\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C \vdash (\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B)) \quad (7)$$

$$\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \quad (8)$$

$$\vdash (\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \quad (9)$$

*Iný dôkaz.*

$$\begin{aligned} & \vdash (\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \\ \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C & \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \\ \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C, A, B & \vdash C \end{aligned}$$

Toto je tvrdenie ktoré chceme dokázať. Dopracujeme sa k nemu s použitím teóremy 6:  
 $\vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$ .

$$\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C, A, B \vdash A \rightarrow (\neg\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)) \quad (1)$$

$$\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C, A, B \vdash \neg\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B) \quad (2)$$

$$\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C, A, B \vdash \neg\neg B \quad (3)$$

$$\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C, A, B \vdash \neg(A \rightarrow \neg B) \quad (4)$$

$$\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C, A, B \vdash C \quad (5)$$

$$\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C) \quad (6)$$

$$\vdash (\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \quad (7)$$

Hotovo. Nezabúdajte, že je dobré si preriešiť príklady zo strán 38-39 z českých skrípt. Konkrétne implikácie, konjunkcie a disjunkcie. Pri dôkazoch môžete používať Postove teóremy, ktoré boli na prednáške (dokazovali sme ich aj na cvičeniach) a príklady s menším poradovým číslom/písmenom.