Výroky

Zo strednej školy by ste mali poznať zhruba nasledovnú definíciu výroku.

Neformálna definícia 1 (Výrok)

Výrok je tvrdenie vyjadrené oznamovacou vetou (príp. viacerými vetami), ktorému možno priradiť pravdivostnú hodnotu

Vyskúšajte si túto definíciu na nasledovnej úlohe.

→ **Úloha 1.** Ktoré z nasledovných tvrdení sú výroky? Aká je ich pravdivostná hodnota?

a) Číslo 17 je prvočíslo.

b) $5 < 3$

c) Každé prirodzené číslo je párne.

d) Nech ABC je ľubovoľný trojuholník. Označme S stred strany BC, T stred strany CA a U stred strany AB. Nech P je priesečník priamok AS a BT. Potom bod T leží na priamke CU.

e) Dajte mi A z Úvodu do diskrétnych štruktúr!

f) Koľko je hodín?

g) Prší.

h) Tento výrok je nepravdivý.

i) V roku 2047 pristanú ľudia na Marse.

j) Niekedy ľudia na Marse.

k) Každé párne číslo väčšie ako 2 možno zapísať ako súčet dvoch prvočísel.

l) Existuje nekonečne veľa palindromických prvočísel. (To sú také, ktoré sa rovnako čítajú odpredu aj odzadu, napr. 101.)

m) Existuje množina M, pre ktorú platí $|\mathbb{N}| < |M| < |\mathbb{R}|$.

n) Trenčín a Brezno sú krajské mestá Slovenska.

→ **Úloha 2.** V nasledovných výrokoch identifikujte elementárne výroky a zapíšte pomocou nich výsledné zložené výroky. Určte ich pravdivostnú hodnotu.

a) Ak sa číslo 47 končí cifrou 5, tak je číslo 47 deliteľné 5.

b) Štvorec je 4-uholník, ale nemá všetky strany rovnako dlhé.

c) Ak sú čísla $42^{47} + 13$ a 17 prvočíslami, tak číslo $42^{47} + 13$ je prvočíslo.

d) Ak sa Nicolas Cage narodil v apríli, tak ak sa Nicolas Cage narodil v roku 1965, tak sa narodil v apríli.

Definícia 1 (Tautológia)

Tautológia je výrok, ktorý je pravdivý bez ohľadu na ohodnotenie.

Tautológie reprezentujú správne spôsoby uvažovania, ktorými vieme odvodzovať nové pravdivé výroky.

Úloha 3. Rozhodnite, či nasledovné zložené výroky sú tautológie.

a) $(a \wedge b) \Rightarrow a$

b) $a \Rightarrow (a \vee b)$

→ c) $[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] \Rightarrow (a \Rightarrow c)$

→ d) $[a \wedge (b \vee c)] \Leftrightarrow [(a \wedge b) \vee c]$

e) $[a \wedge (b \vee c)] \Leftrightarrow [(a \wedge b) \vee (a \wedge c)]$

→ **Úloha 4.** Znegujte nasledovné zložené výroky

a) $a \wedge (b \Rightarrow \neg c)$

b) $(a \vee \neg b) \Rightarrow (\neg c \Leftrightarrow a)$

c) $a \wedge [(b \wedge \neg a) \vee (c \wedge \neg b)]$

Úloha 5. Zjednodušte nasledovné zložené výroky:

a) $[a \vee (\neg b \vee a)] \wedge (\neg a \vee b)$

b) $((b \wedge a) \vee (a \wedge \neg b)) \Rightarrow (c \vee a)$

c) $((b \wedge a) \vee (a \wedge \neg b)) \Rightarrow (c \wedge a)$

→ **Úloha 6.** Vyjadrite operácie $\Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$ pomocou operácií $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Úloha 7. Vyjadrite operáciu $\vee$ pomocou $\neg$ a $\wedge$.

Úloha 8. (*) Viete nájsť jednu logickú spojku, pomocou ktorej možno vyjadriť všetky logické spojky? Ak áno, skúste vyjadriť $\wedge, \vee, \Rightarrow$ pomocou danej spojky.

Úloha 9. Iba pomocou výrokových spojok (teda nie pomocou kvatifikátorov, množín a iných vecí) zapíšte výroky, ktoré budú vyjadrovať:

a) Práve jeden z výrokov a, b, c je pravdivý.

b) Práve dva z výrokov a, b, c sú pravdivé.

Úloha 10. Na ostrove žijú poctivci a klamári. Poctivec vždy hovorí pravdu a klamár vždy iba klame. Na brehu ostrova sú Anton a Beáta. Príde k nim cudzinec a pýta sa Antona: „Ste klamár alebo poctivec?“ Anton odpovie nezrozumiteľne. Cudzinec sa otočí k Beate: „Čo hovoril?“ Beáta odpovedá: „Hovoril, že je klamár.“ Čo sú Anton a Beáta? Dá sa to určiť? Mohli niečo také povedať?

→ **Úloha 11.** Niekto zo štyroch kamarátov zjedol koláč, ktorý bol pre všetkých. Katka vraví: „Anna zjedla koláč.“ Zuzka: „Ja som zjedla koláč.“ Anna: „Peter ho zjedol.“ Peter: „Anna klame, keď hovorí, že ja som ho zjedol.“ Ak je len jeden z výrokov pravdivý, kto je páchateľ?

→ **Úloha 12.** Na vesmírnej lodi sú astronauti a podvodníci. Astronaut vždy hovorí pravdu a podvodník vždy klame. Medzi Červeným, Zeleným a Modrým sa udial nasledovný rozhovor:

Červený: „Zelený je astronaut, ale Modrý je podvodník.“

Zelený: „Červený aj Modrý sú podvodníci.“

Modrý: „Červený aj Zelený sú podvodníci.“

Určte, kto sú astronauti a kto podvodníci.

Úloha 13. Určte, kto je kto po nasledovnom rozhovore:

Červený: „Ak Modrý hovorí pravdu, tak Zelený je podvodník.“

Zelený: „Ak Červený hovorí pravdu, tak Modrý je podvodník.“

Modrý: „Ak je Zelený astronaut, tak Modrý je tiež astronaut.“

Úloha 14. Určte, kto je kto po nasledovnom rozhovore:

Červený: „Žltý je podvodník, no Zelený je astronaut.“

Žltý: „Zelený je podvodník, no Modrý je astronaut“

Zelený: „Modrý je podvodník, no Červený je astronaut“

Modrý: „Zelený je podvnodník, no Červený je astronaut.“

Úloha 15. Znegujte nasledovné zložené výroky:

a) $(a \wedge b) \vee (\neg c \wedge d)$

b) $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (c \Rightarrow d)$

c) $a \Rightarrow (b \Rightarrow (c \Rightarrow d))$

d) $((a \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d$

e) $[(\neg a \Rightarrow b) \vee c] \wedge [(d \wedge \neg a) \Rightarrow (e \vee \neg d)]$

Úloha 16. Pre nasledovné dvojice výrokov zistite, či z nich možno vytvoriť pravdivú implikáciu:

a) Prirodzené číslo končí cifrou 5. Prirodzené číslo je deliteľné 5.

b) Mám 18 rokov. Legálne pijem alkohol.

c) Legálne auto. Mám vodičský preukaz.