Kvantifikované výroky

→ **Úloha 1.** Symbolicky zapíšte štruktúru nasledovných výrokov:

a) Ak všetky celé čísla sú párne, tak existuje celé číslo, ktoré je párne.

b) Každé celé číslo je párne alebo nepárne.

c) Ak prvočísla 3 a 5 sú nepárne, tak všetky prvočísla sú nepárne.

d) Ak Adam pozná Betku a Betka pozná Cyrila, tak Adam pozná Cyrila.

e) Prirodzené číslo je deliteľné piatimi práve vtedy, keď sa končí na cifru 0 alebo 5.

→ **Úloha 2.** Vyjadrite slovne nasledovné výroky a určte ich pravdivostnú hodnotu.

a) $\exists x \in \mathbb{Z}\colon x > 5$

b) $\forall x \in \mathbb{Z}\colon x^2 > 0$

c) $\forall x \in \mathbb{R}^+\colon \sqrt{x} \in \mathbb{R}^+$

d) $\exists x \in \mathbb{R}\colon x^2 = -1$

e) $(\exists x \in \mathbb{Z}\colon x = 5) \Rightarrow (\forall y \in \mathbb{Z}\colon y = 5)$

f) $(\exists x \in \mathbb{Z}\colon x = 5) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{Z}\colon x = 5)$

→ **Úloha 3.** Rozhodnite o pravdivosti nasledovných výrokov:

a) $\forall x \in \mathbb{R}\colon \forall y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$,

b) $\exists x \in \mathbb{R}\colon \forall y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$,

c) $\forall x \in \mathbb{R}\colon \exists y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$,

d) $\exists x \in \mathbb{R}\colon \exists y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$,

→ **Úloha 4.** Rozhodnite o pravdivosti nasledovných výrokov:

a) $\forall x \in \mathbb{R}\colon \forall y \in \mathbb{R}\colon xy = 0$,

b) $\exists x \in \mathbb{R}\colon \forall y \in \mathbb{R}\colon xy = 0$,

c) $\forall x \in \mathbb{R}\colon \exists y \in \mathbb{R}\colon xy = 0$,

d) $\exists x \in \mathbb{R}\colon \exists y \in \mathbb{R}\colon xy = 0$.

Úloha 5. Rozhodnite o pravdivosti nasledovných výrokov:

a) $\exists x \in \mathbb{R}\colon x \cdot 1 = x$

b) $\forall x \in \mathbb{R}\colon x \cdot 1 = x$

c) $\exists x \in \mathbb{R}\colon x \cdot x = 1$

d) $\forall x \in \mathbb{R}\colon x \cdot x = 1$

e) $\exists x \in \mathbb{R}\colon \exists y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$

f) $\exists x \in \mathbb{R}\colon \forall y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$

g) $\forall x \in \mathbb{R}\colon \exists y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$

h) $\forall x \in \mathbb{R}\colon \forall y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$

Úloha 6. Rozhodnite o pravdivosti nasledovných výrokov:

a) $\exists n \in \mathbb{N}\colon \exists k \in \mathbb{N}\colon k > n$

b) $\forall n \in \mathbb{N}\colon \exists k \in \mathbb{N}\colon k > n$

c) $\exists n \in \mathbb{N}\colon \forall k \in \mathbb{N}\colon k > n$

d) $\exists n \in \mathbb{N}\colon \exists k \in \mathbb{N}\colon k \mid n$

e) $\forall n \in \mathbb{N}\colon \exists k \in \mathbb{N}\colon k \mid n$

f) $\exists n \in \mathbb{N}\colon \forall k \in \mathbb{N}\colon k \mid n$

→ **Úloha 7.** Ako negujeme kvantifikované výroky

a) $\forall x \in M : p(x)$, b) $\exists x \in M : p(x)$?

Úloha 8. Znegujte nasledovné výroky.

→ a) $\forall n \in \mathbb{Z} : n = 2 \vee n = 5$

→ b) $\exists n \in \mathbb{N} : 42 < n < 47$

→ c) $\forall a \in \mathbb{N}^+ \; \exists b \in \mathbb{N} \; \forall c \in \mathbb{N} : (c > b \Rightarrow c^a < 2^c)$

→ d) $\forall a \in \mathbb{R} \; \forall b \in \mathbb{R} : [(a \notin \mathbb{Q} \wedge b > 0) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Q} : |a - c| < b]$

→ e) $\forall a \in \mathbb{N} : [(\exists b \in \mathbb{N} : a = b^2) \Rightarrow [(\forall c \in \mathbb{N} : a \neq 3c) \Rightarrow (\exists d \in \mathbb{N} : a + 2 = 3d)]]$

f) $\forall x \in \mathbb{R} \; \forall y \in \mathbb{R} : [(x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : [c = x \cdot y \Rightarrow [\forall z \in \mathbb{R} : (z > c \Rightarrow z > 0)]]]$

Znegujte aj výroky z predošlých úloh.

Úloha 9. Aký význam budú mať výroky $\forall x \in M : a(x)$, $\exists x \in M : a(x)$ ak je M a) jednoprvková b) prázdna množina?

Teraz sa pozrieme na to zapisovanie zložitejších výrokov formulovaných slovne. Všetky výroky budeme tvoriť v doméne celých čísel iba s pomocou symbolov, ktoré sme uviedli v úvode cvičenia. K tomu si definujeme nasledovné výrokové formy:

- $e(a) \Leftrightarrow a$ je párne číslo.
- $o(a) \Leftrightarrow a$ je nepárne číslo.
- $d \mid a \Leftrightarrow$ číslo a je deliteľné číslom d.
- $a \bmod d = z \Leftrightarrow a$ dáva zvyšok z po delení číslom d.
- $p(a) \Leftrightarrow a$ je prvočíslo.

Tieto výrokové formy môžete tiež používať pri zápisoch výrokov.

Úloha 10. Symbolicky zapíšte nasledovné výroky:

→ a) Každé číslo deliteľné desiatimi je deliteľné aj dvomi.

→ b) Súčet dvoch párnych čísel je párny.

→ c) Žiadne prvočíslo nie je párne.

d) Medzi ľubovoľnými dvomi nepárnymi číslami je nejaké párne číslo.

e) Súčet ľubovoľných troch za sebou idúcich celých čísel je deliteľný tromi.

→ f) Existuje práve jedno párne číslo. (Pripomíname, že kvantifikátor $\exists!$ nie je zavedený.)

→ g) Číslo 1 je najmenšie nepárne prirodzené číslo.

h) Číslo 6 je najväčším spoločným deliteľom čísel 24 a 36.

→ i) Ak je nejaké celé číslo väčšie ako 5, tak aj číslo o 1 väčšie je väčšie ako 5.

j) (*) Prvočísel je nekonečne veľa.

k) (*) Pre každé celé čísla a, d ($d \neq 0$) vieme jednoznačne určiť zvyšok čísla a po delení číslom d.

> **Poznámka**
>
> Výrokovú formu $a \bmod d = z$ pokladáme zatiaľ za elementárnu, napriek tomu, že sa v nej vyskytuje $=$ a vedeli by sme ju chápať ako rovnosť čísel $a \bmod d$ a z. Je to preto, lebo aby sme mod mohli používať ako operátor, tak potrebujeme ukázať, že zvyšok po delení je určený jednoznačne, teda dokázať výrok k) z úlohy 10.

Úloha 11. Definujte výrokové formy $e(a)$, $o(a)$, $d \mid a$, $a \bmod d = z$, $p(a)$.

Úloha 12. Definujte výrokové formy:

a) a je najmenšie celé číslo, pre ktoré platí výroková forma $q(a)$

b) Existuje práve jedno celé číslo, pre ktoré platí výroková forma $q(a)$.

c) Číslo d je najväčším spoločným deliteľom čísel a, b.

Úloha 13. Máme výrokovú formu $p(x)$ definovanú na univerze $\mathbb{Z}$. Ako zapíšeme výroky „$p(x)$ platí pre všetky prirodzené čísla x.“ a „existuje prirodzené číslo x, pre ktoré platí $p(x)$“?