Dôkazy

→ **Úloha 1.** Dokážte, že platí

$$\sqrt{60} > \sqrt{13} + \sqrt{17}.$$

→ **Úloha 2.** Porovnajte nasledovný pokus o dôkaz tvrdenia z predošlej úlohy s pokusom o dôkaz iného tvrdenia.

Pokus o dôkaz 1

Dokážeme, že platí

$$\sqrt{60} > \sqrt{13} + \sqrt{17}.$$

Zo školy vieme, že nerovnosti môžeme nejako upravovať, tak poďme na to:

$$\begin{aligned}
\sqrt{60} &> \sqrt{13} + \sqrt{17} && |^2 \\
\left(\sqrt{60}\right)^2 &> \left(\sqrt{13} + \sqrt{17}\right)^2 \\
60 &> 13 + 2\sqrt{13}\sqrt{17} + 17 \\
60 &> 30 + 2\sqrt{221} && | -30 \\
30 &> 2\sqrt{221} && | /2 \\
15 &> \sqrt{221} && |^2 \\
255 &> 221
\end{aligned}$$

Takto sme sa dostali k niečomu, čo platí, takže aj pôvodná nerovnosť je pravdivá.

Pokus o dôkaz 2

Dokážeme, že platí

$$\sqrt{2} > \sqrt{3}.$$

Opäť na to pôjdeme rovnako ako v predlošlom príklade. Teda budeme upravovať dokazovanú nerovnosť:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &> \sqrt{3}, && | -\sqrt{3} \\
\sqrt{2} - \sqrt{3} &> 0, && |^2 \\
(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 &> 0, \\
2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 3 &> 0, && | +2 \cdot \sqrt{6} \\
5 &> 2 \cdot \sqrt{6}, && |^2 \\
25 &> 24,
\end{aligned}$$

a to je pravda. Preto platí $\sqrt{2} > \sqrt{3}$.

→ **Úloha 3.** Dokážte, že pre každé nezáporné reálne číslo x platí

$$\sqrt{4x+8} > \sqrt{x} + \sqrt{x+4}.$$

→ **Úloha 4.** Dokážte: $\exists x \in \mathbb{R}\colon 3x + 2 > 2x + 5$.

→ **Úloha 5.** Dokážte: $(\exists x \in \mathbb{R}\colon 3x + 2 > 2x + 5) \wedge (\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x^2 + y^2 \geq 2xy)$.

→ **Úloha 6.** Dokážte: $\forall a \in \mathbb{R}^+\colon \exists b \in \mathbb{R}\colon \dfrac{3}{b+1} - 2 = a$.

→ **Úloha 7.** Dokážte: $\forall x \in \mathbb{R}^+\colon x > 5 \Rightarrow \dfrac{14}{x+3} + 7 < 9$.

→ **Úloha 8.** Dokážte: $\forall x \in \mathbb{R}\colon \sqrt{x^2 + 4x + 1} \neq x + 2$.

→ **Úloha 9.** Dokážte, že pre všetky x, y, z platí:

$$5x \leq 7y + 2z \quad \vee \quad 3y + z \leq 2x \quad \vee \quad 4y + z \leq 3x.$$

→ **Úloha 10.** Dokážte: $7 \mid 5^{1234} - 2 \Rightarrow 7 \mid 5^{1235} + 4$.

→ **Úloha 11.** Dokážte nasledovné tvrdenia:

a) $\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+\colon \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$,

b) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\colon [(5 \mid a \wedge 5 \mid b) \Rightarrow 5 \mid (a+b)]$,

c) $\forall n \in \mathbb{N}\colon (7 \nmid 47n \Rightarrow 7 \nmid n)$,

d) $\forall x \in \mathbb{R}^+\colon \left(3x + 5 < 2^x \Rightarrow 4x + 9 < 2^{x+1}\right)$,

e) $\forall x,\, y \in \mathbb{R}^+\colon \left(7x + \frac{3}{y} < 4y + \frac{2}{x} \Rightarrow x < y\right)$.

Úloha 12. Rozhodnite o pravdivosti nasledovných výrokov. vaše tvrdenia dokážte.

→ a) Súčet ľubovoľných troch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný tromi.

→ b) Súčet ľubovoľných štyroch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný štyrmi.

c) Súčin ľubovoľných troch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný tromi.

d) Súčin ľubovoľných päť za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný piatimi.

e) Súčin ľubovoľných päť za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný číslom 120.

f) Súčet tretích mocnín troch za sebou idúcich čísel je deliteľný deviatimi.

g) Súčet dvoch racionálnych čísel je racionálny.

→ h) Súčet dvoch iracionálnych čísel je iracionálny.

i) Súčin dvoch racionálnych čísel je racionálny.

j) Súčin dvoch iracionálnych čísel je iracionálny.

k) Súčet racionálneho a iracionálneho čísla je iracionálny.

l) Ak súčin dvoch reálnych čísel je iracionálne číslo, tak aspoň jedno z nich musí byť iracionálne.

→ m) Ak súčet piatich reálnych čísel je nula, tak aspoň jedno z nich je nezáporné.

n) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\colon [(a \mid b \wedge a \mid c) \Rightarrow a \mid (b + c)]$

o) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\colon [a \mid (b + c) \Rightarrow (a \mid b \wedge a \mid c)]$

p) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\colon [a \mid (b + c) \Rightarrow (a \mid b \vee a \mid c)]$

→ q) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\colon [a \mid bc \Rightarrow (a \mid b \wedge a \mid c)]$

→ r) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\colon [a \mid bc \Rightarrow (a \mid b \vee a \mid c)]$

s) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\colon [(\mathrm{NSD}(a, b) = \mathrm{NSD}(b, c) = 1 \Rightarrow \mathrm{NSD}(a, c) = 1]$

t) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\colon [(\mathrm{NSD}(a, b) = \mathrm{NSD}(b, c) = 2 \Rightarrow \mathrm{NSD}(a, c) = 2]$

u) Ak $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ pre nejaké racionálne čísla a, b, tak aj $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, aj $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

→ v) Z ľubovoľných piatich za sebou idúcich čísel možno vybrať štyri čísla, ktorých súčet bude deliteľný štyrmi.

w) $\exists c \in \mathbb{R}\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon 47n^5 + 42n^3 + 17n^2 - 9 \leq cn^5$

x) $\exists c \in \mathbb{R}\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon n^2 + 47 \leq cn$

y) $\exists K \in \mathbb{R}\colon \forall x \in \mathbb{R}\colon x \geq K \Rightarrow x^7 - 50x^6 - 47x^5 - 42x^3 - 17x^2 + 18x - 9 \geq 0$

Úloha 13. *Pytagorejská trojica* je taká trojica kladných celých čísel a, b, c, pre ktoré platí $a^2 + b^2 = c^2$. Rozhodnite, či v každej pytagorejskej trojici:

a) sa nachádza aspoň jedno párne číslo;

b) sa nachádza aspoň jedno číslo deliteľné tromi;

c) sa nachádza aspoň jedno číslo deliteľné štyrmi;

d) sa nachádza aspoň jedno číslo deliteľné šiestimi;

e) sa nachádza aspoň jedno číslo deliteľné siedmimi.

Úloha 14. Rozhodnite, či nasledovné tvrdenia sú tautológie

→ a) $[(a \Rightarrow b) \wedge (c \vee d) \wedge ((\neg a \wedge c) \Rightarrow e)] \Rightarrow [\neg b \Rightarrow (e \vee d)]$,

→ b) $[(\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge d) \vee (e \wedge \neg c \wedge \neg a)] \Rightarrow [(\neg b \wedge \neg c) \Rightarrow a]$,

→ c) $[(\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge d) \vee (e \wedge \neg c \wedge a)] \Rightarrow [(\neg b \wedge \neg c) \Rightarrow a]$,

d) $(a \wedge b) \Rightarrow (c \vee (d \Rightarrow (e \vee (a \wedge d))))$

e) $[(a \Rightarrow b) \wedge (\neg b \vee c)] \Rightarrow [((c \Rightarrow d) \wedge a) \Rightarrow d]$

f) $(a \wedge \neg b) \vee [((\neg c \vee d) \wedge (a \vee \neg e) \wedge (f \vee \neg g)) \Rightarrow (d \vee \neg e)]$

g) $(a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg b \Rightarrow (d \wedge \neg e)) \vee (\neg c \wedge d \wedge e) \vee (d \Rightarrow (\neg a \wedge c))$

h) $(a \Rightarrow \neg c) \vee (\neg b \Rightarrow (\neg d \Rightarrow e)) \vee ((f \wedge c) \Rightarrow (a \wedge \neg d))$.

Úloha 15. Dokážte, že platí:

a) $\sqrt{9 - \sqrt{10}} < \sqrt{9 + \sqrt{10}} - 1$

b) $\sqrt{4} + \sqrt{7} < \sqrt{3} + \sqrt{12}$

c) $\sqrt{60} + \sqrt{\sqrt{47} - \sqrt{46}} > \sqrt{13} + \sqrt{17}$

Úloha 16. Dokážte nasledovné tvrdenia:

a) $\log_2 3$ je iracionálne číslo.

b) $\forall n \in \mathbb{Z}\colon (3 \nmid n \Rightarrow n^2 \bmod 3 = 1)$

c) $\forall a, b \in \mathbb{N}\colon [(22 \mid a \wedge 33 \mid b) \Rightarrow 11 \mid (a + b)]$

d) $\forall n \in \mathbb{N}^+\colon (2^n < n! \Rightarrow 2^{n+1} < (n + 1)!)$

e) $\forall n \in \mathbb{N}\colon (5 \mid n^2 + 1 \Rightarrow 10 \nmid n)$

f) $\forall a, b \in \mathbb{N}\colon [(a \bmod 7 = 4 \wedge b \bmod 7 = 5) \Rightarrow ab \bmod 7 = 6]$

g) $\forall a, b \in \mathbb{R}^+\colon \dfrac{a+b}{2} \leq \dfrac{2(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)}$

h) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+\colon \left(5x^2 + 7x + 2 \leq 4y^2 + 3y \Rightarrow x \leq y\right)$.

Úloha 17. Dokážte, že pre každé prvočíslo p je $\sqrt{p}$ iracionálne číslo.

Úloha 18. Dokážte, že ak existuje nekonečne veľa prvočísel p, pre ktoré je aj $p + 2$ prvočíslo, tak potom existuje nekonečne veľa prvočísel p, pre ktoré je $p + 2$ prvočíslo a navyše $p + 1$ je deliteľné 6-timi.

Úloha 19. Dokážte, že prvočísel je nekonečne veľa.

Úloha 20. Nech a, b sú kladné celé čísla opačnej parity. Dokážte, že ak nemožno krátiť zlomok $\dfrac{a}{b}$, tak nemožno krátiť ani zlomok $\dfrac{a-b}{a+b}$.

Úloha 21. Máme reálne čísla a, b, c také, že čísla

$$\frac{1}{b+c}, \qquad \frac{1}{c+a}, \qquad \frac{1}{a+b}$$

tvoria aritmetickú postupnosť. Dokážte, že aj čísla a^2, b^2, c^2 tvoria aritmetickú postupnosť.

Úloha 22. Dokážte, že ak x, y sú celé čísla pre ktoré platí $31 \mid 6x + 11y$, potom aj $31 \mid x + 7y$.

Úloha 23. Nech a, b, c sú reálne čísla, pre ktoré platí $a + b + c = 0$. Dokážte, že

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = -3.$$

Úloha 24. Dokážte, že neexistuje mnohočlen $f(x)$ s celočíselnými koeficientmi, pre ktorý by platilo $f(7) = 11$ a $f(11) = 13$.

Úloha 25. Dokážte, že ak e (eulerova konštanta) nie je riešením polynomiálnej rovnice s celočíselnými koeficientmi, tak ani $2e$ nie je.

Úloha 26. Je číslo $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ racionálne?

Úloha 27. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je číslo 2 najväčším spoločným deliteľom čísel $2n + 6$, $4n + 10$.

Úloha 28. (*) Dokážte, že ak existuje nekonečne veľa palindromických prvočísel (čítajú sa rovnako spredu aj odzadu), tak existuje aj nekonečne veľa palindromických prvočísel, ktoré majú nepárny počet cifier.