Tautológie

Úloha 1. Rozhodnite, či nasledovné výroky sú tautológie:

→ a) $[(a \Rightarrow b) \wedge (c \vee d) \wedge ((\neg a \wedge c) \Rightarrow e)] \Rightarrow [\neg b \Rightarrow (e \vee d)]$,

→ b) $[(\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge d) \vee (e \wedge \neg c \wedge \neg a)] \Rightarrow [(\neg b \wedge \neg c) \Rightarrow a]$,

→ c) $[(\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge d) \vee (e \wedge \neg c \wedge a)] \Rightarrow [(\neg b \wedge \neg c) \Rightarrow a]$,

d) $(a \wedge b) \Rightarrow (c \vee (d \Rightarrow (e \vee (a \wedge d))))$

e) $[(a \Rightarrow b) \wedge (\neg b \vee c)] \Rightarrow [((c \Rightarrow d) \wedge a) \Rightarrow d]$

f) $(a \wedge \neg b) \vee [((\neg c \vee d) \wedge (a \vee \neg e) \wedge (f \vee \neg g)) \Rightarrow (d \vee \neg e)]$

g) $(a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg b \Rightarrow (d \wedge \neg e)) \vee (\neg c \wedge d \wedge e) \vee (d \Rightarrow (\neg a \wedge c))$

h) $(a \Rightarrow \neg c) \vee (\neg b \Rightarrow (\neg d \Rightarrow e)) \vee ((f \wedge c) \Rightarrow (a \wedge \neg d))$.

Úloha 2. Pre každý z uvedených výrokov nájdite taký príklad množiny M a výrokových foriem $a(t)$ a $b(t)$ definovaných na množine M, aby po ich dosadení do výroku sme dostali pravdivý / nepravdivý výrok

→ a) $[(\exists x \in M\colon a(x)) \wedge (\exists y \in M\colon b(y))] \Rightarrow \forall z \in M\colon (a(z) \Rightarrow b(z))$

b) $[\forall x \in M\colon (a(x) \Rightarrow \exists y \in M\colon b(y))] \Rightarrow \forall x \in M\colon (a(x) \Rightarrow b(x))$

c) $[(\forall x \in M\colon a(x)) \Rightarrow (\exists y \in M\colon b(y))] \Rightarrow \forall x \in M\colon \exists y\colon (a(x) \Rightarrow b(y))$

d) $((\forall x \in M\colon a(x)) \Rightarrow (\exists y \in M\colon b(y))) \Rightarrow (\forall x \in M\colon \exists y \in M\colon a(x) \Rightarrow b(y))$.

e) $[(\forall x)(\exists y)(a(x) \Rightarrow b(y)) \wedge (\exists x)(\forall y)(b(x) \Rightarrow c(y))] \Rightarrow (\forall x)(a(x) \Rightarrow c(x))$

f) $(\forall x \in M)(a(x) \Rightarrow \neg b(x)) \Rightarrow [(\forall x \in M)(a(x) \Rightarrow b(x)) \vee (\forall x \in M)(b(x) \Rightarrow a(x))]$

→ **Úloha 3.** Rozhodnite, či nasledovné výroky sú tautológie:

a) $((\forall x)(a(x) \wedge b(x)))$

b) $(\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)a(x)$

c) $(\exists x)a(x) \Rightarrow (\forall x)a(x)$

d) $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))$

e) $((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)) \Rightarrow (\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x))$

f) $(\exists x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)b(x))$

g) $((\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)b(x)) \Rightarrow (\exists x)(a(x) \Rightarrow b(x))$

h) $(\forall x)(a(x) \wedge b(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)a(x) \wedge (\forall x)b(x))$

i) $(\forall x)(a(x) \vee b(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)a(x) \vee (\forall x)b(x))$