Matematická indukcia

Úloha 1. V rade máme n žiaroviek. Na začiatku prvej minúty sú všetky zhasnuté. Po každej minúte buď zapneme práve jednu vypnutú žiarovku, alebo vypneme práve jednu zapnutú žiarovku. Uvedomte si, že všetkých možností, ako môžu žiarovky svietiť, je 2^n.

Dokážte, že vieme tieto ťahy voliť tak, aby sme počas 2^n minút dostali každú z týchto možností rozsvietenia žiaroviek práve raz.

Ide o komplexnejšiu úlohu. V tejto úlohe sa objavuje prirodzené číslo n. To nám dáva istú výhodu – môžeme ju začať riešiť najprv pre malé hodnoty n. Najskôr sa však zamyslíme nad tým, ako si vieme túto situáciu predstaviť. Jednoduchý spôsob je jedným symbolom vyjadriť zhasnutú žiarovku, napr. `O` a iným zasvietenú, napr. `X` (iné možnosti sú napr. `0` a `1` alebo ∘ a •). Jeden konkrétny stav si vieme teda vyjadriť napr. ako `XOOOXXOX`.

Keď máme vybraný spôsob reprezentácie stavu, tak si môžeme rozmyslieť, koľko všetkých stavov žiaroviek môžeme mať. Pre každú z n žiaroviek máme 2 možnosti (svieti alebo nesvieti). Celkovo tak máme $2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2 = 2^n$ možných stavov.

Poďme sa teda pustiť do dokazovania. Pre $n = 1$ máme dva stavy `O` a `X`. Máme ukázať, že každý z týchto stavov vieme dosiahnuť dovolenými operáciami. Ako toto dokážeme? Keďže dokazujeme, že niečo *vieme* spraviť, tak nám na to stačí príklad. A ten je jednoduchý – po prvej minúte zažneme žiarovku. Tento príklad vieme vyjadriť aj nasledovne:

```
O
X
```

Tu vieme vidieť, ako môžu vyzerať dôkazy pre konkrétne n – stačí nám uviesť konkrétnu postupnosť stavov žiaroviek. Pre $n = 2$ tak môžeme nájsť nasledovné postupnosti (dokonca sú jediné):

```
OO      OO
OX      XO
XX      XX
XO      OX
```

Pre $n = 3$ zas takéto:

```
OOO     OOO
XOO     XOO
XXO     XXO
XXX     OXO
XOX     OXX
OOX     OOX
OXX     XOX
OXO     XXX
```

Teraz sme už neuviedli všetky, ale nič principiálne iné neexistuje. (Dá sa ukázať, že všetky ostatné sa dajú získať preusporiadaním stĺpcov.)

Takto by sme vedeli pokračovať aj ďalej. No týmto spôsobom vieme tvrdenie dokázať len pre konkrétne hodnoty n. Pre vysoké hodnoty n by takýto výpis bol aj veľmi dlhý. No hlavný problém je, že my potrebujeme toto tvrdenie dokázať všeobecne pre všetky prirodzené n. Skúsme teda nájsť nejaký systém, všeobecné pozorovania, ktorým vieme opísať, ako by takáto postupnosť stavov vyzerala všeobecne.

Pekný systém vieme nájsť na postupnosti vpravo. Vieme ju totiž opísať nasledovne.

postupnosť pre $n = 2$



obrátená postupnosť pre $n = 2$

A túto myšlienku vieme aj pekne zovšeobecniť: Vždy keď ideme tvoriť postupnosť zažínania žiaroviek, tak si najprv vezmeme všetky žiarovku okrem poslednej a aplikujeme na nich ich postupnosť. Potom zažnme poslednú žiarovku a postupnosť dokončíme opakovaním tých istých ťahov na zvyšných žiarovkách len v opačnom poradí. Takto vieme nájsť postupnosť pre každé kladné celé číslo n.

Keď si to zhrnieme, tak čo z tohto riešenia je podstatné? Ide o dve veci:

- Ukážka postupnosti pre $n = 1$.
- Dôkaz, že pokiaľ vieme prepínať nejaký počet žiaroviek, tak vieme prepínať aj o 1 väčší počet žiaroviek.

Rozmyslite si, že z týchto dvoch tvrdení vyplýva to, čo sme mali dokázať. Poriadne spísané riešenie uvedieme neskôr. Teraz si povieme niečo o princípe riešenia tejto úlohy, ktorý sme tu objavili. Kľúčovou myšlienkou bolo uvedomenie, že postupnosť prepínania žiaroviek vieme vyrobiť z postupu pre o 1 menší počet žiaroviek. Čiže túto úlohu sme riešili pre prirodzené čísla postupne od najmenších a využívali sme pri tom riešenia pre menšie prípady. Takýto postupný prístup vie byť často ľahší ako sa snažiť vyriešiť úlohu pre všetky prirodzené čísla „naraz“.

Tento prístup v matematike zachytáva *princíp matematickej indukcie*.

Dôkaz matematickou indukciou (základná forma)

Matematickou indukciou vieme dokázať, že nejaké tvrdenie (výroková forma) platí pre všetky prirodzené čísla. Dôkaz sa skladá z dvoch krokov:

1. (*báza*) Dokážeme tvrdenie pre $n = 0$.
2. (*indukčný krok*) Dokážeme, že ak tvrdenie platí pre prirodzené číslo k, tak potom platí aj pre číslo $k + 1$.

Symbolicky vieme tento princíp vyjadriť nasledovne.

Dôkaz matematickou indukciou (základná forma)

Matematickou indukciou dokazujme výrok $\forall n \in \mathbb{N}\colon v(n)$, kde $v(n)$ je nejaká výroková forma definovaná na prirodzených číslach. Dôkaz pozostáva z toho, že dokážeme:

1. $v(0)$,
2. $\forall k \in \mathbb{N}\colon (v(k) \Rightarrow v(k + 1))$.

Kľúčovým je práve druhý krok[1]. Práve v ňom zachytávame našu úvahu, ako z dôkazu (resp. riešenia) pre menší prípad dostaneme dôkaz pre väčší prípad. Pri štandardnej forme indukcii takto pracujeme s tvrdením pre dve za sebou idúce prirodzené čísla. Tie vieme vyjadriť pomocou nejakej premennej ako k a $k+1$ ako sme to aj spravili. Môžeme však použiť aj inú premennú, pokojne aj n (pokiaľ sa nám nebude mýliť s premennou n, ktorá je zvyčajne použitá v samotnom zadaní úlohy). Ďalšou možnosťou je vyjadriť za sebou idúce čísla ako $k - 1$ a k.

Dôležité je, že indukčný krok je všeobecné tvrdenie – to pri slovnom opise nie je tak jasne vidieť. Preto je použitie premennej potrebné. Nestačí nám napr. overiť, že ak tvrdenie platí pre $n = 4$, tak aj pre $n = 5$.

[1] Avšak ani prvý nemôžeme podceňovať.

V indukčnom kroku dokazujeme implikáciu. Tú môžeme dokázať ľubovoľným dôkazom, najčastejšie však ide o priamy dôkaz. Vtedy predpokladáme, že uvažované tvrdenie platí pre $n = k$ (teda, že platí $v(k)$). Tento predpoklad sa nazýva *indukčný predpoklad* a často ho označujeme IP.

Matematická indukcia má veľa rôznych foriem. Najbežnejšou modifikáciu je, že nedokazujeme tvrdenie pre všetky prirodzené čísla, ale len od nejakej hodnoty n_0.

Dôkaz matematickou indukciou (forma s posunutým začiatkom)

Matematickou indukciou dokazujme výrok $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \colon v(n)$, kde $v(n)$ je nejaká výroková forma definovaná na prirodzených číslach. Dôkaz pozostáva z toho, že dokážeme:

1. $v(0)$,
2. $\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq n_0 \colon (v(k) \Rightarrow v(k+1))$.

V takomto prípade v báze neoverujeme tvrdenie pre $n = 0$, ale pre najmenšiu hodnotu, pre ktoré chceme tvrdenie dokázať. Mierne sa nám tu však mení aj indukčný krok. Tiež ho nemusíme dokazovať pre všetky prirodzené čísla, ale stačí nám ho dokázať len pre tie, ktoré sú väčšie rovné n_0.

Riešenie úlohy 1 o žiarovkách zapísané podľa štruktúry dôkazu matematickou indukciou by teda mohlo vyzerať napríklad nasledovne.

Riešenie

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou.

Báza. Pre $n = 1$ máme jednu vypnutú žiarovku, ktorú zapneme, čím dosiahneme všetky dva stavy.

Indukčný krok. Nech $k \in \mathbb{N}^+$. Predpokladajme, že k zhasnutých žiaroviek vieme prepínať 2^k minút bez opakovania stavov (IP). Teraz dokážme, že $k + 1$ zhasnutých žiaroviek vieme prepínať 2^{k+1} minút bez opakovania stavov. To spravíme nasledovne:

1. Prvých 2^k minút budeme prepínať prvých k žiaroviek podľa IP. Takto dostaneme všetky stavy, kde žiarovka $k + 1$ je zhasnutá.
2. Po (2^k)-tej minúte prepneme žiarovku $k + 1$.
3. Zvyšných 2^k minút budeme robiť prepnutia z IP, ale v opačnom poradí. Takto dostaneme všetky stavy, kde žiarovka $k + 1$ svieti.

Opísali sme tak postup, v ktorom medzi každými dvomi minútami prepneme práve jednu žiarovku. Taktiež sme zdôvodnili, že týmto postupom dostaneme všetky stavy žiaroviek (najprv tie s vypnutou žiarovkou $k + 1$, potom zo zapnutou). Týmto sme dokázali, čo sme chceli.

Matematická indukcia má v matematike celkovo dva významy:

1. Ide o spôsob rozmýšľania nad problémami, kedy vieme vyriešiť problém nie hneď, rovno, ale postupne s využitím riešenia pre menšie prípady.
2. Ide o exaktný spôsob, ako vieme formulovať logické úvahy založené na opakovaní myšlienok.

Ešte si demonštrujeme fungovanie matematickej indukcie na inom type úlohy – na dôkaze nerovnosti. Vopred upozorníme, že ide o tvrdenie, ktoré je pomerne zjavné. Nestačí nám však len sa presvedčiť, že platí, ale chceme exaktný dôkaz. Zamerajte sa na taký, ktorý nebude využívať pokročilé znalosti (napr. o funkciách) – z vlastnej skúsenosti mnoho takých dôkazov je nejasných a neúplných.

Úloha 2. Dokážte, že pre všetky kladné prirodzené čísla n platí $2^n > n$.

Poďme tvrdenie dokazovať postupne pre niekoľko malých prirodzených čísel.

n	2^n		n
1:	2	$>$	1
2:	4	$>$	2
3:	8	$>$	3
4:	16	$>$	4
5:	32	$>$	5

Áno, je nám jasné, že ľavá strana bude vždy väčšia. Prirodzeným spôsobom argumentácie vie byť, že ľavá strana „rastie rýchlejšie“ ako pravá. Čo to však znamená? Poďme to presne sformulovať. Môžeme skúmať, *o koľko* sa jednotlivé strany zvyšujú.

$$\begin{array}{rcl} & 2 > 1 & \\ +2 & & +1 \\ & 4 > 2 & \\ +4 & & +1 \\ & 8 > 3 & \\ +8 & & +1 \\ & 16 > 4 & \\ +16 & & +1 \\ & 32 > 5 & \end{array}$$

Ako dokážeme, že sa ľavá strana vždy zvýši o viac ako pravá? Poďme to sformulovať. Keďže chceme dokázať všeobecné tvrdenie, tak si vezmime premennú k. Máme nerovnosť $2^k > k$. Keď zväčšíme k o 1, tak dostaneme $2^{k+1} > k + 1$. Pravá strana sa nám zväčší o 1 a ľavá o $2^{k+1} - 2^k = 2^k$. Schematicky znázornené jeden takýto krok vyzerá takto.

$$\begin{array}{rcl} & 2^k > k & \\ +2^k & & +1 \\ & 2^{k+1} > k + 1 & \end{array}$$

Keď máme vyjadrené jednotlivé prírastky, tak chceme dokázať, že pre každé $k \in \mathbb{N}^+$ platí $2^k \geq 1$. No a to je pravda, ako vyplýva zo samotnej definície umocňovania – násobením k dvojok dostaneme číslo, ktoré je aspoň 2, teda je väčšie ako 1.

Keď si to zhrnieme, tak pre dôkaz nerovnosti $\forall n \in \mathbb{N}^+ \colon 2^n > n$ nám stačí dokázať:

1. Nerovnosť platí pre $n = 1$, teda že $2 > 1$.
2. Pri zvýšení n o 1 sa ľavá strana zväčší viac ako pravá strana.

Keďže pre $n = 1$ je ľavá strana väčšia, tak keď budeme zväčšovať n, tak ľavá strana sa bude zvyšovať o viac ako pravá, preto bude stále väčšia. Nerovnosť tak bude platiť pre všetky kladné prirodzené čísla.

Opäť sme skončili na dvoch tvrdeniach, ktoré zodpovedajú báze a indukčnému kroku v dôkaze matematickou indukciou. Ukážeme si ešte, ako takýto dôkaz poriadne zapísať.

Riešenie úlohy 2

Matematickou indukciou.

Báza. Pre $n = 1$ platí $2^n = 2 > 1 = n$.

Indukčný krok. Nech $k \in \mathbb{N}^+$. Predpokladajme, že platí $2^k > k$ (IP).
Dokážeme, že potom platí $2^{k+1} > k+1$.

Vieme, že platí $2^k > 1$. Keď sčítame túto nerovnosť s IP, tak dostaneme

$$2^k + 2^k > k+1, \qquad \text{teda} \qquad 2^{k+1} > k+1,$$

čo sme chceli dokázať.

Úloha 3. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí:

a) $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,

b) $1+3+5+7+\cdots+2n-1 = n^2$,

c) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

d) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$, pre $n \geq 1$,

e) $2^0+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1$,

f) $1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$,

g) $1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 3^3+\cdots+n\cdot 2^n = 2+(n-1)\cdot 2^{n+1}$,

h) $1+q+q^2+\cdots+q^n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$, kde q je ľubovoľné reálne číslo rôzne od 1.

i) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n} > \dfrac{1}{2}$,

Úloha 4. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí:

→ a) $7 \mid 8^n - 1$,

→ b) $3 \mid n^3 - n$,

c) $3 \mid n^3 + 5n$,

d) $5 \mid n^5 - n$,

e) $31 \mid 5^{n+1} + 6^{2n-1}$,

f) $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$,

→ **Úloha 5.** Nech $F_0 = 0$ a $F_1 = 1$. Pre $k \geq 2$ položme $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ (tzv. Fibonacciho postupnosť). Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené číslo k platí

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_k = F_{k+2} - 1.$$

→ **Úloha 6.** Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré platí

a) $2^n \geq n-2$,

b) $n^2 \leq 2^n$.

Úloha 7. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré platí

a) $n^2 \leq 2^n$,

b) $3^n + 4^n \geq 5^n$,

c) $2^n \geq 20n$,

d) $3^n < n!$,

e) $2n < 3^n$,

f) $(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$.

Úloha 8. V rovine je rozmiestnených n kružníc, z ktorých každá pretína všetky ostatné. Dokážte, že oblasti roviny, ktoré tieto kružnice vyčleňujú, možno ofarbiť dvoma farbami tak, aby žiadne dve susedné oblasti nemali rovnakú farbu. Oblasti, ktoré majú spoločné len niektoré body, nepovažujeme za susedné.

Úloha 9. Na stole máme v rade n mincí zľava doprava, ktoré môžu byť ľubovoľne otočené (buď lícom nadol, alebo nahor). V jednom ťahu môžeme zobrať niekoľko prvých mincí zľava a každú z nich otočiť. Dokážte, že môžeme naše ťahy voliť tak, aby sme po nejakom čase mali všetky mince otočené lícom nahor.

Úloha 10. Máme $2n+1$ guľočok očíslovaných číslami od 1 po n s navzájom rôznymi hmotnosťami. V jednom kroku vieme podať veštcovi tri guličky a on nám povie, ktorá z nich je najľahšia. dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 1$ vieme nájsť najľahšiu guľôčku na najviac $n+1$ vážení.

Úloha 11. Nepriateľ si myslí číslo od 1 po 2^n. Vjednom kroku sa ho vieme spýtať ľubovoľnú ÁNO / NIE otázku a on nám pravdivo odpovie. Dokážte, že vieme zistiť nepriateľovo číslo na najviac n otázok.

Úloha 12. V bani s neobmedzeným množstvom poschodí, ktoré sú zhora nadol očíslované -1, -2, -3, ..., pracuje niekoľko (konečne veľa) trpaslíkov. Každý deň, v rovnakom čase, z každého poschodia, na ktorom sa nachádzajú aspoň dvaja trpaslíci, sa práve jeden trpaslík presunie nadol o toľko poschodí, koľko kolegov mal v ten deň na svojom poschodí. Dokážte, že po určitom (konečnom) počte dní bude na každom poschodí najviac jeden trpaslík.