Matematická indukcia

Úloha 1. V rade máme n žiaroviek. Na začiatku prvej minúty sú všetky zhasnuté. Po každej minúte buď zapneme práve jednu vypnutú žiarovku, alebo vypneme práve jednu zapnutú žiarovku. Uvedomte si, že všetkých možností, ako môžu žiarovky svietiť, je 2^n.

Dokážte, že vieme tieto ťahy voliť tak, aby sme počas 2^n minút dostali každú z týchto možností rozsvietenia žiaroviek práve raz.

Úloha 2. Dokážte, že pre všetky kladné prirodzené čísla n platí $2^n > n$.

Úloha 3. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí:

a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,

b) $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2n - 1 = n^2$,

c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

d) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$, pre $n \geq 1$,

e) $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$,

f) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$,

g) $1\cdot 2^1 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 3^3 + \cdots + n\cdot 2^n = 2 + (n-1)\cdot 2^{n+1}$,

h) $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$, kde q je ľubovoľné reálne číslo rôzne od 1.

i) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{1}{2}$,

Úloha 4. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí:

→ a) $7 \mid 8^n - 1$,

→ b) $3 \mid n^3 - n$,

c) $3 \mid n^3 + 5n$,

d) $5 \mid n^5 - n$,

e) $31 \mid 5^{n+1} + 6^{2n-1}$,

f) $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$,

→ **Úloha 5.** Nech $F_0 = 0$ a $F_1 = 1$. Pre $k \geq 2$ položme $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ (tzv. Fibonacciho postupnosť). Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené číslo k platí

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_k = F_{k+2} - 1.$$

→ **Úloha 6.** Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré platí

a) $2^n \geq n - 2$,

b) $n^2 \leq 2^n$.

Úloha 7. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré platí

a) $n^2 \leq 2^n$,

b) $3^n + 4^n \geq 5^n$,

c) $2^n \geq 20n$,

d) $3^n < n!$,

e) $2n < 3^n$,

f) $(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$.

Úloha 8. V rovine je rozmiestnených n kružníc, z ktorých každá pretína všetky ostatné. Dokážte, že oblasti roviny, ktoré tieto kružnice vyčleňujú, možno ofarbiť dvoma farbami tak, aby žiadne dve susedné oblasti nemali rovnakú farbu. Oblasti, ktoré majú spoločné len niektoré body, nepovažujeme za susedné.

Úloha 9. Na stole máme v rade n mincí zľava doprava, ktoré môžu byť ľubovoľne otočené (buď lícom nadol, alebo nahor). V jednom ťahu môžeme zobrať niekoľko prvých mincí zľava a každú z nich otočiť. Dokážte, že môžeme naše ťahy voliť tak, aby sme po nejakom čase mali všetky mince otočené lícom nahor.

Úloha 10. Máme $2n+1$ guľočok očíslovaných číslami od 1 po n s navzájom rôznymi hmotnosťami. V jednom kroku vieme podať veštcovi tri guličky a on nám povie, ktorá z nich je najľahšia. dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 1$ vieme nájsť najľahšiu guľôčku na najviac $n + 1$ vážení.

Úloha 11. Nepriateľ si myslí číslo od 1 po 2^n. Vjednom kroku sa ho vieme spýtať ľubovoľnú ÁNO / NIE otázku a on nám pravdivo odpovie. Dokážte, že vieme zistiť nepriateľovo číslo na najviac n otázok.

Úloha 12. V bani s neobmedzeným množstvom poschodí, ktoré sú zhora nadol očíslované -1, -2, -3, ..., pracuje niekoľko (konečne veľa) trpaslíkov. Každý deň, v rovnakom čase, z každého poschodia, na ktorom sa nachádzajú aspoň dvaja trpaslíci, sa práve jeden trpaslík presunie nadol o toľko poschodí, koľko kolegov mal v ten deň na svojom poschodí. Dokážte, že po určitom (konečnom) počte dní bude na každom poschodí najviac jeden trpaslík.