Množiny

→ **Úloha 1.** Nech $A = \{1, 2, 3, 2, 4\}$

a) Koľko prvkov má množina A?

Určte pravdivostné hodnoty výrokov:

b) $1 \in A$,

c) $\{1\} \in A$,

d) $\{1\} \subseteq A$,

e) $A \in A$,

f) $A \subseteq A$,

g) $\emptyset \in A$,

h) $\emptyset \subset A$,

i) $\{a, b\} \in A$,

j) $\{a, b\} \subseteq A$.

→ **Úloha 2.** Uveďte príklad množiny B, pre ktorú platia všetky nasledovné výroky: $\emptyset \in B$, $2 \in B$, $\{3, 4\} \subset B$, $\{5, 6\} \in B$.

Úloha 3. Uveďte príklad množiny C, pre ktorú platí $\{\emptyset\} \in C \wedge \{\emptyset\} \subseteq C$.

→ **Úloha 4.** Uvažujme množiny:

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4, 5, 6\}, \quad C = \{x \in B \mid (x-3)(x-4) = 0\}, \quad D = \{k^3 - 7k \mid k \in A\}.$$

Vyjadrite nasledovné množiny vypísaním všetkých prvkov:

a) $C =$

b) $D =$

c) $A \cap B =$

d) $A \setminus B =$

e) $A \cup C =$

f) $D \setminus B =$

Úloha 5. Nech $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Koľko prvkov má množina $\{\{a, -a\} \mid a \in A\}$?

Úloha 6. Nech $M = \{-10, -9, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 9, 10\}$ a nech K je množina kladných čísel z M, S je množina obsahujúca násobky štyroch z M (aj záporné) a $P = \{-7, -1, 3, 4\}$. Vypíšte prvky množiny

$$(K'_M - P) \cap (S \cup P).$$

Úloha 7. Matematicky presne zapíšte množiny:

→ a) množina, ktorá obsahuje reálne čísla, ktoré sú menšie ako 42 alebo väčšie ako 77

→ b) množina, ktorá obsahuje celé čísla väčšie ako -17 a zároveň menšie ako 100;

c) množina párnych celých čísel;

→ d) množina nepárnych celých čísel;

e) množina prirodzených čísel, ktoré sú deliteľné piatimi;

→ f) množina druhých mocnín celých čísel, teda $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\}$;

g) množina mocnín dvojky, teda $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots\}$;

h) množina prirodzených čísel, ktoré dávajú po vydelení siedmimi zvyšok 3, teda $\{3, 10, 17, 24, 31, 38, \ldots\}$;

i) množina prirodzených čísel, ktoré sa končia na cifru 6, teda $\{6, 16, 26, 36, 46, \ldots\}$;

j) množina prirodzených čísel, ktoré sú deliteľné dvomi alebo tromi;

→ k) množina zložených kladných celých čísel, teda $\{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, \ldots\}$;

→ l) množina všetkých prvočísel, teda $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$.

→ **Úloha 8.** Máme dva spôsoby ako zapísať množinu nepárnych **celých** čísel:

$$N_1 = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{a} \qquad N_2 = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Sú tieto množiny rovnaké? (Teda platí $N_1 = N_2$?)

→ **Úloha 9.** Čo v prípade takéhoto zápisu množiny nepárnych **prirodzených** čísel?

$$P_1 = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\} \qquad \text{a} \qquad P_2 = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

→ **Úloha 10.** Dokážte identity:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $(A - C) - (B - C) = A - (B \cup C)$

Podobné identity na precvičenie dokazovania nájdete v skriptách

→ **Úloha 11.** Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C platí $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$. Platí aj opačná implikácia?

→ **Úloha 12.** Rozhodnite, či pre ľubovoľné množiny A, B, C platí:

a) $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \subseteq C)$

b) $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow (A \subseteq B \vee A \subseteq C)$

Úloha 13. Dokážte, že nasledovné tri podmienky sú ekvivalentné:

→ (i) $A \subseteq B$,

→ (ii) $A \cup B = B$,

→ (iii) $A \cap B = A$,

(iv) $A \dot{-} B = B - A$.

→ **Úloha 14.** Zostrojte potenčné množiny $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ a $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$.

→ **Úloha 15.** Zistite, v akom vzťahu (rovnosť / inklúzia / žiaden) sú množiny:

a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(A \cap B)$

b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(A \cup B)$

Úloha 16. Zistite, či pre ľubovoľné množiny A, B platí:

a) $\mathcal{P}(A - B) - \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$,

b) $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A - B) - \{\emptyset\}$.

Vaše tvrdenia dokážte.

Úloha 17. Zistite, či pre ľubovoľné množiny A, B, C platí:

a) $\mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C) \subseteq \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C)$,

b) $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C)$.

Vaše tvrdenia dokážte.

Úloha 18. Nech A je podmnožina prirodzených čísel. *Supermnožinou* množiny A nazveme množinu všetkých nadmnožín množiny A v univerze prirodzených čísel. Budeme ju označovať $\mathcal{S}(A)$. Teda

$$\mathcal{S}(A) = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \subseteq X\}.$$

Zistite, či pre ľubovoľné množiny A, B platí:

a) $\mathcal{S}(A \cap B) \subseteq \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$,

b) $\mathcal{S}(A \cap B) \supseteq \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$.

Vaše tvrdenia dokážte. Pre získanie plného počtu bodov nesmiete bez dôkazu využiť tvrdenia o množinách, všetky využité tvrdenie dôkážte z definície.

Úloha 19. Dokážte, že $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ sa dá pre $n \geq 2$ vyjadriť ako:

a) $A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - (A_1 \cup A_2)) \cup \cdots \cup (A_n - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}))$

b) $(A_1 - A_2) \cup \cdots \cup (A_{n-1} - A_n) \cup (A_n - A_1) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$

Riešenie úlohy 15a)

Riešenie

Ukážeme, že $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

Dôkaz $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$: Pre všetky X platí:

1. Nech $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
2. $X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B)$ (definícia prieniku)
3. $X \subseteq A \wedge X \subseteq B$ (definícia potenčnej množiny)
4. $X \subseteq A \cap B$, lebo každý prvok množiny X sa nachádza v A (vďaka $X \subseteq A$) aj v B (vďaka $X \subseteq B$), teda sa nachádza aj v $A \cap B$.
5. $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$ (definícia potenčnej množiny).

Tým sme ukázali, že platí $(\forall X)(X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)) \Rightarrow (X \in \mathcal{P}(A \cap B))$.

Dôkaz $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \supseteq \mathcal{P}(A \cap B)$: Pre všetky X platí:

1. Nech $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$
2. $X \subseteq A \cap B$ (definícia potenčnej množiny)
3. $X \subseteq A$ (lebo $X \subseteq A \cap B \subseteq A$)
4. $X \subseteq B$ (lebo $X \subseteq A \cap B \subseteq B$)
5. $X \subseteq A \wedge X \subseteq B$ (lebo 3. a 4.)
6. $X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B)$ (definícia potenčnej množiny)
7. $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ (definícia prieniku)

Tým sme ukázali, že platí $(\forall X)(X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)) \Leftarrow (X \in \mathcal{P}(A \cap B))$.

Poznámky

Zdôvodnenie šedou sú zrejmé (ide len o použitie definície), môžete ich vynechať. Dôkaz 4. kroku 1. inklúzie možno spraviť viac formálne aj takto:

i. Nech $y \in X$
ii. $y \in A$ (lebo $X \subseteq A$)
iii. $y \in B$ (lebo $X \subseteq B$)
iv. $y \in A \cap B$ (lebo ii. a iii.)

Podobne možno formálne dokázať aj 3. krok (a analogicky aj 4. krok) z 2. inklúzie:

i. Nech $y \in X$
ii. $y \in A \cap B$ (lebo $X \subseteq A \cap B$)
iii. $y \in A$ (definícia prieniku)

Riešenie úlohy 12

Riešenie

a) Dokážeme obe implikácie priamym dôkazom.

$\Rightarrow$: Nech platí $A \subseteq B \cap C$, dokážeme $A \subseteq B \wedge A \subseteq C$.

1. Nech $x \in A$
2. $x \in B \cap C$ (z predpokladu $A \subseteq B \cap C$)
3. $x \in B \wedge x \in C$ (definícia prieniku)
4. $A \subseteq B$ ($x \in B$)
5. $A \subseteq C$ ($x \in C$)
6. $A \subseteq B \wedge A \subseteq C$.

$\Leftarrow$: Nech platí $A \subseteq B \wedge A \subseteq C$, dokážeme $A \subseteq B \cap C$.

1. Nech $x \in A$
2. $x \in B$ ($A \subseteq B$)
3. $x \in C$ ($A \subseteq C$)
4. $x \in B \wedge x \in C$
5. $x \in B \cap C$ (def. prieniku)
6. $A \subseteq B \cap C$.

b) Ukážeme kontrapríklad, pre ktorý tvrdenie neplatí. Nech

$$A = \{1, 3\},$$
$$B = \{1, 2\},$$
$$C = \{3, 4\}.$$

Očividne platí $A \subseteq B \cup C$, ale neplatí $A \subseteq B$ ani $A \subseteq C$. Skutočne, ak by sme sa snažili dokázať implikáciu $\Rightarrow$, tak sa dostaneme k bodu z ktorého nevieme pokračovať.

Nech $A \subseteq B \cup C$. Skúsime dokázať $A \subseteq B \vee A \subseteq C$. Aby bola disjunkcia pravdivá, musí platiť aspoň jeden člen. Skúsme dokázať najprv prvý, teda $A \subseteq B$.

1. Nech $x \in A$
2. $x \in B \cup C$ ($A \subseteq B \cup C$)
3. $x \in B \vee x \in C$.

A tu sa dostávame k problému. Táto disjunkcia bude pravdivá aj vtedy, keď $x \notin B$ ale $x \in C$, preto nevieme dokázať, že $x \in B$ a teda aj $A \subseteq B$. Keď sa pokúsime dokázať $A \subseteq C$, tak sa dostaneme k rovnakému problému.

Dá sa každopádne overiť, že implikácia $\Leftarrow$ platí.