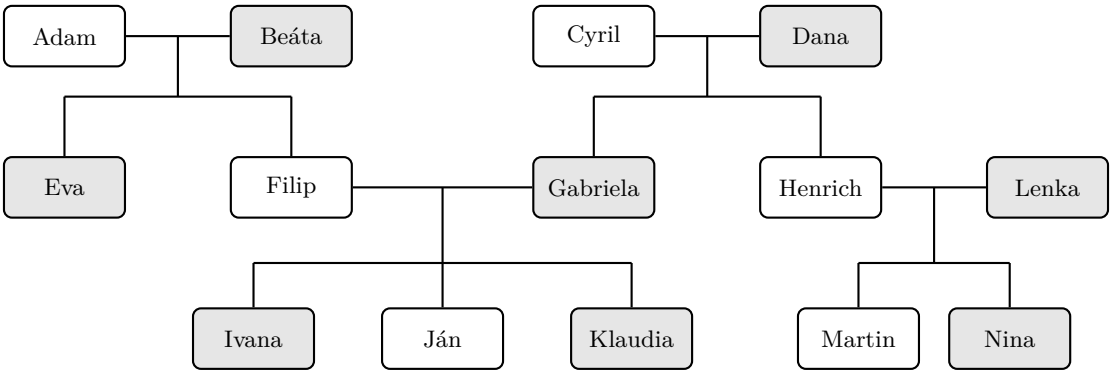
Relácie: operácie a vlastnosti

Rodokmeň

V nasledovných úlohách budeme uvažovať rodinu z rodokmeňa nižšie. Ľudí budeme označovať malými písmenami podľa ich iniciál. Teda a je Adam.



→ **Úloha 1.** Chceme si nejako prehľadne zapísať vzťahy kto je, koho dieťaťom (napr. Eva je dieťaťom Adama). Akými spôsobmi to vieme znázorniť? Akú formálnu štruktúru na to vieme použiť?

Označme L množinu všetkých ľudí, ktorá má rozklad $\{M, Z\}$ na mužov a ženy.

Úloha 2. Vypíšte prvky množín L, M, Z za predpokladu, že ľudia mimo uvedeného rodokmeňa neexistujú.

Na množine L všetkých ľudí, ktorá má rozklad $\{M, Z\}$ na mužov a ženy, definujeme relácie:

- D: $xDy \Leftrightarrow x$ je dieťaťom y,
- S: $xSy \Leftrightarrow x$ je zosobášený/ná s y.

Tento rodokmeň budeme využívať na lepšiu predstavu situácie. V nasledovnej úlohe však budeme chcieť

→ **Úloha 3.** Doplňte chýbajúcich ľudí do zápisov (nájdite všetky riešenia) a slovne ich prečítajte:

a) $gD_$ b) $_D\ell$ c) $eS_$

→ **Úloha 4.** Pomocou relácií D, S, operácií na reláciách a množinových operácií definujte relácie:

a) je rodičom,←
b) je vnukom/vnučkou,←
c) je starým rodičom,←
d) je matkou,←
e) je dedkom,←
f) je súrodencom,
g) je bratom,
h) je svokrou,←
i) je ujom,
j) je sesternicou,
k) je predkom,
l) je príbuzným.

Úloha 5. Doplňte chýbajúcich ľudí alebo relácie:

a) $fD^-_$ c) $gSD_$ e) $lSDD^-S_$
b) $iDD_$ d) $mDD^-_$ f) $sSS_$

Operácie s reláciami

→ **Úloha 6.** Majme reláciu R medzi prvkami množiny $A = \{a, b, c, d\}$ a množiny $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a reláciu S na množine $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ktoré máme zadané nasledovne:

$$R = \{(a, 2), (a, 5), (b, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 5)\},$$
$$S = \{(1, 1), (1, 3), (1, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 5)\}.$$

a) Uveďte príklad z reálneho života, ktorý môže reprezentovať túto situáciu: konkrétne nazvite prvky množín A, B a relácie R, S.

b) Ako vieme tieto relácie znázorniť?

c) Vypíšte relácie R^-, S^-, RS a SR (ak existujú).

d) Uveďte príklady z reálneho života, ktoré nie sú vhodné na reprezentáciu tejto situácie

Úloha 7. Nech D a E sú relácie medzi prvkami množín A a B. Dokážte, že:

a) $(D^-)^- = D$,

→ b) $(D \cap E)^- = D^- \cap E^-$,

c) $(D \cup E)^- = D^- \cup E^-$,

d) $(D \setminus E)^- = D^- \setminus E^-$,

e) $(D^C)^- = (D^-)^C$,

f) $D \subseteq E \Rightarrow D^- \subseteq E^-$.

→ **Úloha 8.** Nech D je relácia medzi prvkami množín A a B a nech E je relácia medzi prvkami množín B a C. Dokážte, že potom $(DE)^{-1} = E^{-1}D^{-1}$.

Úloha 9. Nech R, R_1, R_2 sú binárne relácie z A do B a S, S_1, S_2 binárne relácie z B do C. Rozhodnite, či vo všeobecnosti platia nasledonvé tvrdenia:

→ a) $R(S_1 \cap S_2) = RS_1 \cap RS_2$

b) $(R_1 \cap R_2)S = R_1S \cap R_2S$

c) $R(S_1 \cup S_2) = RS_1 \cup RS_2$

d) $(R_1 \cup R_2)S = R_1S \cup R_2S$

e) ak $S_1 \subseteq S_2$, tak potom $RS_1 \subseteq RS_2$

f) ak $R_1 \subseteq R_2$, tak potom $R_1S \subseteq R_2S$

→ g) $R(S_1 - S_2) = RS_1 - RS_2$

h) $(R_1 - R_2)S = R_1S - R_2S$

V prípade, že v niektorom prípade neplatí rovnosť, platí aspoň jedna inklúzia? Platia v c) a d) obrátené implikácie? (Riešenie úlohy si môžete pozrieť v skriptách Olejár, Škoviera na strane 70 (77 v pdf), Veta 4.3).

Vlastnosti relácií

→ **Úloha 10.** Aké relácie poznáte zo strednej školy? Pre každú z nich určte, či je reflexívna, ireflexívna, symetrická, tranzitívna.

Úloha 11. Nech $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Určite koľko relácií je na množine A

→ a) reflexívnych?

→ b) symetrických?

→ c) reflexívnych a symetrických?

d) symetrických a nie reflexívnych?

e) (*) tranzitívnych?

f) (*) symetrických, reflexívnych a nie tranzitívnych?

→ **Úloha 12.** Rozhodnite, či relácia R je reflexívna, ireflexívna, symetrická, tranzitívna:

a) $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ 6 \mid a + b\}$

b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y \geq 1\}$

c) $T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x^2 + 4y^2 < 4xy\}$

d) Relácia U na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in U \Leftrightarrow 47 \in x \cap y$.

e) $V = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ 5 \mid (a - b)\}$.

Úloha 13. Dokážte, že ak R je tranzitívna relácia, tak aj R^{-1} je tranzitívna relácia.

Úloha 14. Dokážte, že pre ľubovoľnú množinu A a ľubovoľnú reláciu R na množine A platí:

a) R je reflexívna práve vtedy, keď $I_A \subseteq R$.

b) R je symetrická práve vtedy, keď $R^- \subseteq R$.

c) R je tranzitívna práve vtedy, keď $R^2 \subseteq R$.

Úloha 15. Na množine $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ definujte reláciu R, ktorá:

a) je reflexívna, tranzitívna a nie symetrická;

b) nie je reflexívna, symetrická ani tranzitívna;

c) nie je tranzitívna, ale R^2 je tranzitívna;

d) nie je tranzitívna a ani R^2 nie je tranzitívna.

Úloha 16. Rozhodnite, či relácia R je reflexívna, ireflexívna, symetrická, tranzitívna (do pozornosti dávame hlavne úlohy po i)):

a) Relácia R na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ taká, že $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ac = bd$

b) Relácia R na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ taká, že $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$

c) $| = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ (\exists k \in \mathbb{Z})(b = k \cdot a)\}$

d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ \sin x = \sin y\}$

e) $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ 7 \mid a + b\}$

f) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in P \Leftrightarrow x \cap y = \mathbb{Z}$.

g) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in P \Leftrightarrow x \cup y = \mathbb{Z}$.

h) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in P \Leftrightarrow x \cap y = \emptyset$.

i) Relácia P na $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$, taká že $(A, B) \in P \Leftrightarrow |A| = |B|$, kde $|M|$ označuje počet prvkov (konečnej) množiny M.

j) $S = \{(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ |r + s| = |3 + r - s|\}$

k) $T = \{(r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ |r + s| = |3 + r - s|\}$

l) $R = \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ c - d = 4\}$

m) $R = \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ (cd + 100)(cd - 60) = 0\}$

n) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ |x + y||x - y| \leq 3\}$

o) $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ (|a + b| - 24)(|a - b| - 24) = 0\}$

p) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y \in \langle -1, 1\rangle\}$

q) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y \in \langle 0, 1\rangle\}$

r) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x^2 = 2y^2\}$

s) Relácia R na $\mathbb{N}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow x = 2^y$

t) Relácia R na $\mathbb{R}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow x + y \leq 100$

u) Relácia R na $\mathbb{R}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow |x| \leq |y|$.

v) Relácia R na $\mathbb{R}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.

w) Relácia R na $\mathbb{N}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow 3 \mid x^2 + y^2$