Cvičenia pre pokročilých 2

Výroky

Úloha 1. Iba pomocou výrokových spojok (teda nie pomocou kvantifikátorov, množín a iných vecí) zapíšte výroky, ktoré budú vyjadrovať:

a) Práve jeden z výrokov a, b, c je pravdivý.

b) Práve dva z výrokov a, b, c sú pravdivé.

Úloha 2. Rozhodnite o pravdivosti nasledovných tvrdení:

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$,

b) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$,

c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$,

d) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$,

Úloha 3. Rozhodnite o pravdivosti nasledovných tvrdení:

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon xy = 0$,

b) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon xy = 0$,

c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon xy = 0$,

d) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon xy = 0$.

Úloha 4. Rozhodnite, ktoré výroky sú pravdivé.

a) $\exists x \in \mathbb{R}\colon x \cdot 1 = x$

b) $\forall x \in \mathbb{R}\colon x \cdot 1 = x$

c) $\exists x \in \mathbb{R}\colon x \cdot x = 1$

d) $\forall x \in \mathbb{R}\colon x \cdot x = 1$

e) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$

f) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$

g) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$

h) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$

Úloha 5. Máme výrokovú formu $p(x)$ definovanú na univerze $\mathbb{Z}$. Ako zapíšeme výroky „$p(x)$ platí pre všetky prirodzené čísla x.“ a „existuje prirodzené číslo x, pre ktoré platí $p(x)$“? Kvantifikátory možno používať len vo forme $\exists x\colon$ a $\forall x\colon$ bez uvedenia množín.

Úloha 6. Zostavte výrokové formy, ktoré budú hovoriť nasledovné:

a) $e(a)$: a je párne číslo.

b) $o(a)$: a je nepárne číslo.

c) $d \mid a$: číslo a je deliteľné číslom d.

d) $a \bmod d = z$: a dáva zvyšok z po delení číslom d.

e) Číslo d je najväčším spoločným deliteľom čísel a, b.

f) a je najmenšie číslo množiny M, pre ktoré platí $v(a)$ (M je podmnožina celých čísel)

g) $p(x)$: x je prvočíslo

Poznámka. Premenné použité v týchto výrokových formách môžu byť väčšinou brané len z niektorých množín (napr. celé čísla). Tieto zamlčané podmienky si doplňte podľa toho, ako sú známe.

Úloha 7. Zapíšte nasledovné výroky (môžete používať výrokové formy z predchádzajúcej úlohy):

a) Žiadne prvočíslo nie je párne.

b) Súčet dvoch párnych čísel je párny.

c) Medzi ľubovoľnými dvomi racionálnymi číslami je nejaké iracionálne.

d) Existuje práve jedno párne číslo.

e) Ak je nejaké celé číslo väčšie ako 5, tak aj číslo o 1 väčšie je väčšie ako 5.

f) Prvočísel je nekonečne veľa.

g) Pre každé celé čísla a, d ($d \neq 0$) vieme jednoznačne určiť zvyšok čísla a po delení číslom d.

Úloha 8. Zistite, či nasledovné výroky sú tautológie:

a) $\forall x\colon a(x) \Rightarrow \exists x\colon a(x)$

b) $\exists x\colon a(x) \Rightarrow \forall x\colon a(x)$

c) $\forall x\colon (a(x) \wedge b(x)) \Leftrightarrow (\forall x\colon a(x) \wedge \forall x\colon b(x))$

d) $\forall x\colon (a(x) \vee b(x)) \Leftrightarrow (\forall x\colon a(x) \vee \forall x\colon b(x))$

e) $\forall x\colon (a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow (\forall x\colon a(x) \Rightarrow \forall x\colon b(x))$

f) $(\forall x\colon a(x) \Rightarrow \forall x\colon b(x)) \Rightarrow \forall x\colon (a(x) \Rightarrow b(x))$

g) $\exists x\colon (a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow (\forall x\colon a(x) \Rightarrow \exists x\colon b(x))$

h) $(\forall x\colon a(x) \Rightarrow \exists x\colon b(x)) \Rightarrow \exists x\colon (a(x) \Rightarrow b(x))$

Dôkazy

Pokiaľ stihneme, tak si spravíme úvod do dôkazov.

Úloha 9. Dokážte, že pre ľubovoľné nezáporné reálne čísla x, y platí

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Úloha 10. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c platí aspoň jedna z nerovností

$$a^2 \geq bc, \quad b^2 \geq ab, \quad c^2 \geq ac.$$