Cvičenia pre pokročilých 3

Dôkazy

Úloha 1. Dokážte, že pre ľubovoľné nezáporné reálne čísla x, y platí

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Úloha 2. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c platí aspoň jedna z nerovností

$$a^2 \geq bc, \quad b^2 \geq ab, \quad c^2 \geq ac.$$

Úloha 3. Dokážte, že ak x, y sú celé čísla pre ktoré platí $31 \mid 6x + 11y$, potom aj $31 \mid x + 7y$.

Úloha 4. V rade máme n žiaroviek. Na začiatku prvej minúty sú všetky zhasnuté. Po každej minúte buď zapneme práve jednu vypnutú žiarovku, alebo vypneme práve jednu zapnutú žiarovku. Uvedomte si, že všetkých možností, ako môžu žiarovky svietiť, je 2^n.

Dokážte, že vieme tieto ťahy voliť tak, aby sme počas 2^n minút dostali každú z týchto možností rozsvietenia žiaroviek práve raz.

Úloha 5. Máme štvorčekovú sieť rozmerov $2^n \times 2^n$ štvorčekov, na ktorej je jedno zo štyroch prostredných políčok čierne, zvyšné sú biele. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n vieme štvorčekovú sieť vydláždiť dlaždicami v tvare triomina L (ako na obrázku) tak, že sa dlaždice nebudú prekrývať a každé biele políčko bude zakryté dlaždicou. Dlaždice vieme aj otáčať.



Úloha 6. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je číslo 2 najväčším spoločným deliteľom čísel $2n + 6$, $4n + 10$.

Úloha 7. V rade je umiestnených n mincí, z ktorých je každá otočená buď lícom nadol, alebo lícom nahor. V i-tom ťahu vieme zvoliť úsek i za sebou idúcich mincí a všetky z nich otočiť. Rozhodnite, či pre každé n je možné po nejakom konečnom počte ťahov docieliť, že všetky mince sú otočené rovnako.