Cvičenia pre pokročilých 3

Matematická indukcia

Úloha 1. Máme štvorčekovú sieť rozmerov $2^n \times 2^n$ štvorčekov, na ktorej je jedno zo štyroch stredových políčok čierne, zvyšné sú biele. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n vieme štvorčekovú sieť vydláždiť dlaždicami v tvare triomina L (ako na obrázku) tak, že sa dlaždice nebudú prekrývať a každé biele políčko bude zakryté dlaždicou. Dlaždice vieme aj otáčať.



Úloha 2. Dokážte, že pre ľubovoľných n kladných reálnych čísel x_1, x_2, …, x_n so súčinom 1 platí

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n.$$

Úloha 3. Dokážte, že pre ľubovoľných n nezáporných reálnych čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí (tzv. nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom):

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Úloha 4. Hráme sa nasledovnú hru: na začiatku máme jednu kôpku s 10 žetónmi. V jednom kroku si vyberieme ľubovoľnú kôpku s aspoň 2 žetónmi a rozdelíme ju na dve neprázdne kôpky. Keď takto získame jednu kôpku s a žetónmi a druhú s b žetónmi, za takýto krok získame ab bodov. Tieto kroky opakujeme do vtedy, dokým všetky kôpky neobsahujú len jeden žetón. Koľko najviac bodov možno získať v tejto hre? Ako vyzerá odpoveď všeobecne, keď začíname s n žetónmi, kde n je kladné celé číslo?

Príklad. Na začiatku máme kôpku so 10 žetónmi. V prvom kroku ju rozdelíme na dve kôpky s 3 a 7 žetónmi, za čo získame $3 \cdot 7 = 21$ bodov. V druhom kroku si vyberieme napríklad kôpku so 7 žetónmi a rozdelíme ju na 2 a 5 žetónov, čím získame $2 \cdot 5 = 10$ bodov. Zatiaľ máme $21 + 10 = 31$ bodov a ešte vieme pokračovať ďalšími ťahmi.

Úloha 5. V rade je uložených $2^n + 1$ políčok, pričom prvé a posledné políčko sú zasvietené a zvyšné políčka sú zhasnuté. Na prvom (najľavejšom) políčku sa nachádza robot, ktorému môžeme dávať nasledovné príkazy:

- `vpravo`: robot sa pohne o 1 políčko doprava (pokiaľ je na poslednom políčku, tak sa nepohne).
- `vlavo`: robot sa pohne o 1 políčko doľava (pokiaľ je na prvom políčku, tak sa nepohne).
- `zazni`: pokiaľ sa robot nachádza na políčku, ktoré je presne medzi dvomi zasvietenými políčkami, tak toto políčko zažne. V opačnom prípade sa nič nestane.

Dokážte, že pre všetky celé čísla $n \geq 0$, vieme pomocou $n \cdot 2^n$ alebo menej príkazov zažať všetky políčka.

Príklad. Pre $n = 3$ máme $2^3 + 1 = 9$ políčok, ktoré si môžeme očíslovať $0, 1, \ldots, 8$. Príkazy môžeme dávať napríklad takto:

príkaz	akcia robota
`vpravo`	Posun na políčko 1
`vpravo`	Posun na políčko 2
`vpravo`	Posun na políčko 3
`zazni`	Nič sa nestane, lebo políčko 3 sa nenachádza presne medzi políčkami 0 a 8
`vpravo`	Posunieme sa na políčko 4
`zazni`	Robot zažne políčko 4, lebo sa nachádza presne medzi políčkami 0 a 8
`vlavo`	Posun na políčko 3
`vlavo`	Posun na políčko 2
`zazni`	Robot zažne políčko 2, lebo sa nachádza presne medzi políčkami 0 a 4

Po týchto deviatich príkazoch svietia štyri políčka (0, 2, 4 a 8).