Cvičenia pre pokročilých 5

Množiny, usporiadané dvojice, karteziánsky súčin

Úloha 1. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C platí:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

b) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

Úloha 2. Dokážte, že nasledovné podmienky sú ekvivalentné:

(i) $A \subseteq B$,

(ii) $A \cup B = B$,

(iii) $A \cap B = A$,

(iv) $A \dot{-} B = B - A$.

Úloha 3. Dokážte, že množiny A a B sú disjunktné práve vtedy, keď $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$.

Úloha 4. Zistite, v akom vzťahu (rovnosť / inklúzia / žiaden) sú množiny:

a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(A \cap B)$

b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(A \cup B)$

Úloha 5. Zistite, či pre ľubovoľné množiny A, B, C platí:

a) $\mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C) \subseteq \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C)$,

b) $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C)$.

Vaše tvrdenia dokážte.

Úloha 6. Dokážte, že $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ sa dá pre $n \geq 2$ vyjadriť ako:

a) $A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - (A_1 \cup A_2)) \cup \cdots \cup (A_n - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}))$

b) $(A_1 - A_2) \cup \cdots \cup (A_{n-1} - A_n) \cup (A_n - A_1) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$