Cvičenia pre pokročilých 6

Úloh je tu asi trochu viac. Čo nestihneme, tak dokončíme o týždeň.

Úloha 1. Hráme sa nasledovnú hru: na začiatku máme jednu kôpku s 10 žetónmi. V jednom kroku si vyberieme ľubovoľnú kôpku s aspoň 2 žetónmi a rozdelíme ju na dve neprázdne kôpky. Keď takto získame jednu kôpku s a žetónmi a druhú s b žetónmi, za takýto krok získame ab bodov. Tieto kroky opakujeme do vtedy, dokým všetky kôpky neobsahujú len jeden žetón. Koľko najviac bodov možno získať v tejto hre? Ako vyzerá odpoveď všeobecne, keď začíname s n žetónmi, kde n je kladné celé číslo?

Príklad. Na začiatku máme kôpku so 10 žetónmi. V prvom kroku ju rozdelíme na dve kôpky s 3 a 7 žetónmi, za čo získame $3 \cdot 7 = 21$ bodov. V druhom kroku si vyberieme napríklad kôpku so 7 žetónmi a rozdelíme ju na 2 a 5 žetónov, čím získame $2 \cdot 5 = 10$ bodov. Zatiaľ máme $21 + 10 = 31$ bodov a ešte vieme pokračovať ďalšími ťahmi.

Úloha 2. Aké relácie poznáte zo strednej školy? Pre každú z nich určte, či je reflexívna, ireflexívna, symetrická, tranzitívna.

Úloha 3. O každej z nasledujúcich relácií rozhodnite, či je reflexívna, ireflexívna, symetrická, tranzitívna:

a) $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ 6 \mid a + b\}$

b) $T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x^2 + 4y^2 < 4xy\}$

c) Relácia U na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in U \Leftrightarrow 47 \in x \cap y$.

Úloha 4. Na množine $\mathbb{Z}$ uvažujme relácie $\mid$ a $<$. Určte zložené relácie $|<$ a $<|$.

Úloha 5. Nech D je relácia medzi prvkami množín A a B a nech E je relácia medzi prvkami množín B a C. Dokážte, že potom $(DE)^{-1} = E^{-1}D^{-1}$.

Úloha 6. Nech R, R_1, R_2 sú binárne relácie z A do B a S, S_1, S_2 binárne relácie z B do C. Rozhodnite, či vo všeobecnosti platia nasledonvé tvrdenia:

→ a) $R(S_1 \cap S_2) = RS_1 \cap RS_2$

b) $(R_1 \cap R_2)S = R_1S \cap R_2S$

c) $R(S_1 \cup S_2) = RS_1 \cup RS_2$

d) $(R_1 \cup R_2)S = R_1S \cup R_2S$

e) ak $S_1 \subseteq S_2$, tak potom $RS_1 \subseteq RS_2$

f) ak $R_1 \subseteq R_2$, tak potom $R_1S \subseteq R_2S$

→ g) $R(S_1 - S_2) = RS_1 - RS_2$

h) $(R_1 - R_2)S = R_1S - R_2S$

V prípade, že v niektorom prípade neplatí rovnosť, platí aspoň jedna inklúzia? Platia v c) a d) obrátené implikácie? (Riešenie úlohy si môžete pozrieť v skriptách Olejár, Škoviera na strane 70 (77 v pdf), Veta 4.3).