Enumeračné úlohy

Táto sada obsahuje pomerne jednoduché úlohy na určenie počtu možností, tzv. *enumeračné úlohy*. Väčšinu z nich by mal byť schopný vyriešiť absolvent základnej školy, čo ale nemusí byť realita. Zmyslom týchto úloh však nie je len to, aby ste ich vedeli správne vyriešiť, ale aj to, aby ste porozumeli im riešeniam a vybudovali si kombinatorické myslenie. Časom totiž narazíte na náročnejšie úlohy, kde nebude riešenie jasné. Môžete stretnúť viacero riešení tej istej úlohy s rôznymi výsledkami. Ako zistíte, ktoré riešenie je správne?

Aby sme sa mohli rozprávať o správnosti riešení, musíme si vybudovať istú predstavu o tom, ktorú budeme mať za riešeniami takýchto úloh. Jednoduchá takáto predstava je založená na *systematickom výpise všetkých možností*. Takto vieme vyriešiť všetky kombinatorické úlohy s malým výsledkom. Tiež na ňom vieme názorne ilustrovať kombinatorické pravidlá. Pri zložitejších úlohách nám predstava o vypisovaní možností pomôže argumentovať o správnosti riešenia a odhaliť chyby. Ako študentom informatiky vám tréning systematického vypisovania pomôže aj v písaní programov, ktoré budú tieto možnosti preberať za vás – takým sa budete venovať na programovaní.

→ **Úloha 1.** K dispozícii máme cifry $2, 3, 4$. Koľko z nich vieme zložiť

a) dvojciferných čísiel,

b) trojciferných čísiel,

c) štvorciferných čísiel,

d) párnych trojciferných čísel.

Úloha 2. Hádžeme troma kockami rôznych farieb. Koľko môže padnúť rôznych trojíc čísel?

Úloha 3. Najnovší model lopaty vyrábajú v šiestich výkonnostných a v troch energetických kategóriách, pričom ku každej z výkonnostných kategórií je k dispozícii každá z energetických kategórií. Koľko variantov je na trhu celkovo?

Úloha 4. Určte, koľko je všetkých 3-ciferných čísel, ktorých prvá cifra (na mieste stoviek) je deliteľná tromi, druhá cifra je deliteľná štyrmi a posledná cifra je deliteľná piatimi.

→ **Úloha 5.** Koľko písmen má Morseova abeceda, ktorá používa symboly bodku a čiarku v jedno- až štvormiestnych skupinách, pričom každý symbol sa môže opakovať?

Úloha 6. Nájdite počet všetkých štvorciferných čísel.

Úloha 7. Nájdite počet všetkých čísel, ktoré majú aspoň tri cifry a najviac päť cifier.

→ **Úloha 8.** Nájdite počet všetkých 5-ciferných čísel, ktoré majú rovnaké posledné dve cifry.

Úloha 9. Nájdite počet všetkých čísel, ktoré majú aspoň tri cifry, najviac päť cifier a rovnaké posledné dve cifry.

Úloha 10. Koľko existuje všetkých 5-znakových slov zložených z písmen `a`, `b`, `c`, `d`, ktoré začínajú písmenom `a` alebo `b`?

Úloha 11. Koľko existuje všetkých 5-znakových slov zložených z písmen `a`, `b`, `c`, `d`, ktoré sa buď začínajú na `a`, alebo sa súčasne nezačínajú na `a` a končia na `c`?

→ **Úloha 12.** Koľko existuje všetkých 5-znakových slov zložených z písmen `a`, `b`, `c`, `d`, ktoré obsahujú dva po sebe idúce výskyty písmena `b` a žiaden ďalší výskyt písmena `b`?

Úloha 13. Koľko existuje všetkých 5-znakových slov zložených z písmen `a`, `b`, `c`, `d`, ktoré obsahujú každé z písmen aspoň raz?

Úloha 14. Koľko je všetkých 4-znakových slov zložených z písmen `a`, `b` `c`, ktoré obsahujú práve jedno písmeno `a`.

→ **Úloha 15.** Koľko je všetkých 4-znakových slov zložených z písmen `a`, `b` `c`, ktoré obsahujú aspoň jedno písmeno `a`.

→ **Úloha 16.** Nájdite počet a) 2-ciferných, b) 3-cirených čísel, ktoré možno zložiť z cifier 1, 2, 3, 4. Cifry nemôžeme používať opakovane.

→ **Úloha 17.** Nájdite počet všetkých štvorciferných čísel, ktoré majú všetky cifry navzájom rôzne.

→ **Úloha 18.** Koľko existuje 4-ciferných čísel zložených z cifier $1, 2, 3, 4$, v ktorých sa nenachádzajú dve rovnaké cifry bezprostredne za sebou?

→ **Úloha 19.** S pripomienkami k zákonu chce v parlamente vystúpiť 6 poslancov A, B, C, D, E, F.

a) Koľko je možných poradí vystúpení?

b) Koľko je poradí, v ktorých vystupuje A ihneď po E?

c) Koľko je poradí, v ktorých vystupuje A neskôr ako E?

→ **Úloha 20.** Študent má k dispozícii 6 povinne voliteľných predmetov. Koľkými spôsobmi si môže vybrať a) dva, b) tri predmety, ktoré si zapíše? Vypíšte všetky možnosti.

Úloha 21. V hre Mates sa ťahá 5 čísel z 35. Koľko existuje rôznych ťahov, ak nezáleží na poradí vytiahnutých čísel?

→ **Úloha 22.** V Športke sa ťahá 7 čísel zo 49. Z nich je šesť čísel riadnych a jedno dodatkové. Koľko existuje rôznych ťahov, ak nezáleží na poradí vytiahnutých riadnych čísel, ale záleží na rozdiele medzi riadnym a dodatkovým číslom?

→ **Úloha 23.** Vo firme je 8 zamestnancov. Koľkými spôsobmi možno vybrať skupinu zamestnancov, ktorá sa zúčastní konferencie.

→ **Úloha 24.** Na ihrisku sa stretlo 6 kamarátov. Koľkými spôsobmi sa môžu rozdeliť na dva tímy veľkostí

a) 2 a 4,

b) 3 a 3?

→ **Úloha 25.** Za okrúhly stôl s $2n$ stoličkami chceme usadiť $n \geq 2$ manželských párov. Manželia musia sedieť vedľa seba, ale je jedno, či muž bude napravo od manželky alebo opačne. Koľkými spôsobmi ich môžeme usadiť, ak

a) rozlišujeme stoličky?

b) nerozlišujeme stoličky?

→ **Úloha 26.** Na večierku je n mužov a n žien, kde n je kladné celé číslo. Koľkými spôsobmi sa vedia postaviť do kruhu, ak

a) nie sú žiadne obmedzenia,

b) dve ženy nesmú stáť vedľa seba.

Úloha 27. Máme k dispozícii 20 korálikov navzájom rôznych farieb. Koľkými spôsobmi z nich môžeme spraviť náramok s 10 korálkami? Náramky, ktoré sa líšia otočením alebo preklopením, považujeme za rovnaké.

V nasledujúcich úlohách pracujeme s 52 žolíkovými kartami bez žolíkov. Každá karta má jednu zo štyroch farieb (srdcia, káry, piky, trefy) a jednu z trinástich hodnôt (2, 3, …, 10, dolník (J), kráľovná (Q), kráľ (K), eso (A)). Pod *pokrovou kombináciou* rozumieme množinu piatich kariet.

→ **Úloha 28.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií?

→ **Úloha 29.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií, z ktorých možno vytvoriť postupku piatich kariet rovnakej farby (*straight flush*)?

Úloha 30. Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich štyri karty s rovnakým číslom?

→ **Úloha 31.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich tri karty s číslom x a dve karty s číslom $y \neq x$ (*full house*)?

→ **Úloha 32.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií iných ako *full house*?

Úloha 33. Koľko je všetkých pokrových kombinácií, v ktorých majú všetky karty rovnakú farbu (*flush*)?

Úloha 34. Koľko je všetkých pokrových kombinácií, z ktorých možno vytvoriť postupku piatich kariet ľubovoľnej farby (*straight*)?

→ **Úloha 35.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií, ktoré obsahujú trojicu kariet rovnakej hodnoty a zvyšné dve inej hodnoty, navzájom rôznej (*trojica*);

→ **Úloha 36.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich dve karty s číslom x, dve karty s číslom y a jednu kartu s číslom z, pričom $z \neq x \neq y \neq z$ (*dva páry*)?

→ **Úloha 37.** Koľko je všetkých pokrových kombináci, ktoré obsahujú aspoň jedno eso?

→ **Úloha 38.** Nájdite počet kladných deliteľov čísla 120.

Úloha 39. Nájdite počet kladných deliteľov čísla $3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11^8$.

Úloha 40. Nájdite počet kladných deliteľov čísla $3^4 \cdot 4^5 \cdot 6^2 \cdot 7^6$.

→ **Úloha 41.** Koľko je 20-znakových slov zložených z písmen `a`, `b`, ktoré obsahujú rovnaký počet oboch písmen?

Úloha 42. Koľko je 20-znakových slov zložených z písmen `a`, `b`, ktoré obsahujú práve 7 výskytov písmena `a`?

Úloha 43. Koľko je 20-znakových slov zložených z písmen `a`, `b`, `c`, ktoré obsahujú práve 7 výskytov písmena `a`?

→ **Úloha 44.** Koľko je 20-znakových slov zložených z písmen `a`, `b`, `c`, ktoré obsahujú práve 6 alebo 7 výskytov písmena `a`?

→ **Úloha 45.** Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $2n \times 2n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby v každom riadku bolo rovnako veľa bielych a čiernych políčok?

→ **Úloha 46.** Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby v každom riadku aj stĺpci bolo práve jedno čierne políčko?

Úloha 47. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby bol v každom riadku párny počet bielych políčok?

Úloha 48. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby bol v každom riadku aj stĺpci párny počet bielych políčok?

Úloha 49. Koľkými spôsobmi možno postaviť na šachovnicu dve čierne veže a bieleho kráľa tak, aby žiadna z veží kráľa neohrozovala? (Veža v našej terminológii ohrozuje kráľa aj v prípade, keď ju kráľ môže v ďalšom kroku vyhodiť.)

Úloha 50. Určte, koľko je všetkých 6-ciferných čísel zložených z cifier 1 a 7, ktoré neobsahujú tri jednotky po sebe.

Úloha 51. (*) Vyriešte predošlú úlohu pre 20-ciferné čísla.

Úloha 52. (*) Koľkými spôsobmi možno vydláždiť obdĺžnik 3×10 dlaždicami tvaru obdĺžnika rozmerov 1×2?

Úloha 53. (*) Územie Kocúrkova má tvar pravidelného n-uholníka. Starosta Kocúrkova chce rozdeliť jeho územie na trojuholníky, ktoré majú vrcholy vo vrcholoch n-uholníka a aspoň jednu spoločnú stranu s n-uholníkom. Koľkými spôsobmi to vie urobiť?

Úloha 54. (*) Luxusko si objednal ku svojim meninám sadu n luxusných závaží s hmotnosťami $1!\,\mathrm{kg}$, $2!\,\mathrm{kg}$, $3!\,\mathrm{kg}$, $\ldots$, $n!\,\mathrm{kg}$. Koľko rôznych hmotností vie Luxusko pomocou nich odvážiť na rovnoramenných váhach? Závažia môže dávať na obe strany.

Úloha 55. (*) Koľko podmnožín množiny $\{0, 1, \ldots, 3k\}$ má súčet prvkov deliteľný 3?

Výsledky úloh

1.

a) $3^2 = 9$

b) $3^3 = 27$

c) $3^4 = 81$

d) $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$

2. $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

3. $6 \cdot 3 = 18$

4. $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$.

5. $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$

6. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$

7. $9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^4 = 99\,900$

8. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$

9. $9\,990$

10. $2 \cdot 4^4 = 512$

11. $4^4 + 3 \cdot 4^3 = 448$

12. $3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 = 108$

13. $4 \cdot (6 \cdot 10) = 240$

14. $4 \cdot 2^3 = 32$

15. $3^4 - 2^4 = 65$

16. a) $4 \cdot 3 = 12$, b) $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

17. $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$

18. $4 \cdot 3^4 = 324$

19. a) 6!, b) 5!, c) 6!/2

20. a) $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$, b) $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$.

21. $\binom{35}{5}$

22. $\binom{49}{7} \cdot 7$

23. 2^8

24. a) $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$, b) $\frac{1}{2}\binom{6}{3} = 10$

25. a) $2n \cdot 2^n(n-1)! = 2^{n+1}n!$, b) $2^n(n-1)!$.

26. a) $(2n-1)!$, b) $(n-1)!\,n!$ pre $n \geq 1$.

27. $\binom{20}{10}\frac{9!}{2} = 33\,522\,128\,640$.

28. $\binom{52}{5}$

29. $9 \cdot 4 = 36$

30. $13 \cdot 48 = 624$

31. $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 3744$

32. $\binom{52}{5} - 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 2595216$

33. $4 \cdot \binom{13}{5} = 5148$

34. $9 \cdot 4^5 = 9216$

35. $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 48 \cdot 44/2 = 54\,912$

36. $\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot 44 = 123552$

37. $\binom{52}{5} - \binom{48}{5}$.

38. $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

39. $6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9 = 810$

40. $13 \cdot 7 \cdot 7$ deliteľov ($3^4 \cdot 4^5 \cdot 6^2 \cdot 7^6 = 2^{12} \cdot 3^6 \cdot 7^6$)

41. $\binom{20}{10}$

42. $\binom{20}{7}$

43. $\binom{20}{7} \cdot 2^{13}$

44. $\binom{20}{6} \cdot 2^{14} + \binom{20}{7} \cdot 2^{13}$

45. $\binom{2n}{n}^{2n}$

46. $n!$

47. $2^{n(n-1)}$

48. $2^{(n-1)^2}$

49. $64\binom{49}{2} = 75\,264$

50. 44.

51. 223 317

52. 571.

53. $n \cdot 2^5$
Rozdeľte si možnosti podľa miest, na ktorých máme trojuholníky, ktoré majú spoločné práve dve strany s n-uholníkom. Takto započítate každé riešenie dvakrát. [KMS 15/16-Z1-4]

54. $19 \cdot (3^{n-3} - 1)/2 + 9$
Ukážte, že s výnimkou zopár malých závaží, každé rozmiestnenie závaží nám určí jedinečnú hmotnosť, ktorú vieme odvážiť. [KMS 15/16-L3-4]

55. $\dfrac{2^{k+1}(4^k + 2)}{3}$ pre celé $k \geq 0$, vrátane prázdnej množiny (jej súčet je 0). Pre $k = 3$ dostávame 352; ak by sa počítali iba neprázdne podmnožiny, výsledok by bol o 1 menší. `https://skmo.sk/dokument.php?id=4901`